

А. В. Крутов  
Э. Л. Кочетова  
Т. Ф. Гузанова

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Допущено Министерством образования Республики Беларусь  
в качестве учебного пособия для учащихся учреждений  
образования, реализующих образовательные программы  
среднего специального образования

*2-е издание, стереотипное*



Минск  
РИПО  
2016

УДК 621.3(075.32)

ББК 31.21я723

К84

**Рецензенты:**

цикловая комиссия электротехнических дисциплин  
УО «Минский государственный политехнический  
колледж» (Т. С. Шмакова);

профессор кафедры теоретических основ электротехники  
УО «Белорусский государственный университет информатики  
и радиоэлектроники», кандидат технических наук, доцент А. П. Курулев.

*Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или любой ее части не может быть осуществлено без разрешения издательства.*

**Крутов, А. В.**

К84 Теоретические основы электротехники : учеб. пособие / А. В. Крутов, Э. Л. Кочетова, Т. Ф. Гузанова. – 2-е изд., стер. – Минск : РИПО, 2016. – 376 с.

ISBN 978-985-503-580-1.

В учебном пособии приведены основные понятия теории электрических и магнитных линейных и нелинейных цепей и электромагнитного поля, примеры решения задач по всем разделам учебной дисциплины «Теоретические основы электротехники». Содержит примеры с развернутыми решениями и схемы электрических цепей, векторные диаграммы, графики и таблицы, подробно поясняющие предлагаемый теоретический и практический материал, а также вопросы и задачи для контроля.

Предназначено для учащихся учреждений среднего специального образования по электротехническим специальностям.

**УДК 621.3(075.32)**

**ББК 31.21я723**

**ISBN 978-985-503-580-1**

© Крутов А. В., Кочетова Э. Л.,  
Гузанова Т. Ф., 2014

© Оформление. Республиканский институт  
профессионального образования, 2014

## ВВЕДЕНИЕ

---

Электричество не только прочно вошло в наш быт, но и во все области народного хозяйства. Многие технологические процессы производства немислимы без применения электрической энергии. Знание электромагнитных явлений, основ производства, распределения и применения электрической энергии, устройства электрических машин, методов измерения электрических величин, расчета электрических цепей необходимо современному специалисту, в том числе и среднего звена.

В настоящее время процесс глобальной электронизации проникает во все сферы жизнедеятельности общества. Электротехнические изделия, электроника, микропроцессорная техника, технические средства автоматизации производства и управления технологическими процессами, охватывая широкий круг научных, технических и производственных проблем, являются базой для дальнейшего прогресса многих областей промышленности, сельского хозяйства, транспорта и энергетики.

Законы электротехники формируют основу, на которой разрабатывается все разнообразие электрических приборов, аппаратов, машин, преобразователей, информационно-технической продукции. Широкое использование на производстве информационных технологий, микроэлектроники, робототехники, а также средств и систем автоматизации технологических процессов меняет и характер труда, и место человека в производственном процессе. На производстве повышается доля интеллектуального труда, значимость целеустремленной и творческой деятельности. От работников требуется умение постоянно обновлять собственные знания, рационально использовать энергетические ресурсы.

Широкое внедрение в производство огромного количества разнообразных модификаций электрических машин и агрегатов, электронной и микроэлектронной техники, измерительных приборов,

электрических аппаратов, устройств автоматики, обеспечивающих многие технологические процессы, усиливает требования к уровню качества электротехнической подготовки технических специалистов среднего звена. Быстро меняющаяся элементная база электротехнических установок и агрегатов, непрерывно усложняющаяся по своей алгоритмической структуре и схемотехнике, постоянно возрастающий объем информации о новинках электротехники требуют формирования навыков саморазвития будущих специалистов, выхода их с репродуктивного уровня усвоения знаний на уровень формирования компетенций.

В итоге компетентность специалиста оценивается безопасностью функционирования производства, низкой себестоимостью выпускаемой продукции, растущей производительностью труда, экономным использованием сырьевых и энергетических ресурсов. В этой связи повышается роль учебной дисциплины «Теоретические основы электротехники», являющейся своеобразным базисом для изучения учебных дисциплин специального цикла.

Значительная часть учебного пособия посвящена практическому усвоению разделов, связывающих курс физики с теоретической электротехникой. Даны ответы на большую часть вопросов, разъясняющие и иллюстрирующие основные положения теории, что способствует самостоятельному изучению учебной дисциплины, усвоению наиболее сложных для понимания вопросов теории. Ключевым моментам посвящены как вопросы, так и задачи с подробными решениями и ответами.

В учебном пособии при изложении материала использованы Международная система единиц (СИ), условные графические обозначения и правила выполнения электрических схем в соответствии со стандартами Единой системы конструкторской документации (ЕСКД), термины и определения – в соответствии с действующими стандартами.

## 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

---

### 1.1. Основные сведения об электромагнитном поле

Электромагнитное поле является одним из видов материи. Как и вещество, оно обладает массой, энергией, количеством движения и моментом количества движения, т. е. свойствами материи, которые подчиняются основным законам физики.

*Электромагнитное поле* – особый вид материи, который отличается непрерывным распределением в пространстве и обладает дискретностью структуры (фотоны), характеризуется способностью распространяться в вакууме со скоростью, близкой к скорости света, оказывает на заряженные частицы силовое воздействие, зависящее от их скорости и величины заряда.

Электромагнитное поле имеет две взаимосвязанные стороны – электрическое поле и магнитное поле.

*Электрическое поле* обусловлено электрическими зарядами и изменением магнитного поля, оказывает воздействие, в том числе на неподвижные заряженные частицы и тела, с силой, пропорциональной их заряду, и не зависит от их скорости.

*Магнитное поле* обусловлено движущимися электрическими зарядами и изменением электрического поля, оказывает воздействие на движущиеся заряженные тела и частицы с силой, пропорциональной их заряду и скорости движения.

Если электромагнитное поле неизменно во времени, то обе его стороны (электрическое поле и магнитное поле) могут рассматриваться отдельно друг от друга.

### 1.2. Электростатическое поле. Закон Кулона

Электрическое поле (далее – поле) неподвижных заряженных тел при отсутствии в них электрических токов называют *электростатическим*. Примером электростатического поля является поле между электродами заряженного конденсатора.

Заряды неподвижных тел образуются совокупностью зарядов элементарных частиц, движущихся хаотически. Каждая такая частица окружена электромагнитным полем. Однако вследствие хаотического движения их результирующее магнитное поле даже в непосредственной близости от поверхности тела практически отсутствует. Электрические же поля частиц при избытке на теле частиц с зарядами того или иного знака суммируются и обнаруживаются в окружающем тело пространстве.

В основу определения электрического поля положено его механическое проявление. Оно описывается законом Кулона.

Два точечных заряда  $q_1$  и  $q_2$  в вакууме взаимодействуют друг с другом с силой  $\vec{F}$ , прямо пропорциональной произведению зарядов  $q_1$  и  $q_2$  и обратно пропорциональной квадрату расстояния  $R$  между ними:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2 \vec{R}_0}{4\pi\epsilon_0 R^2}, \quad (1.1)$$

где  $\vec{R}_0$  – единичный вектор, направленный по линии, соединяющей заряды (рис. 1.1);

$\epsilon_0$  – электрическая постоянная или диэлектрическая проницаемость вакуума (воздуха),  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м.

Заряды с одинаковыми знаками отталкиваются, а с противоположными притягиваются.

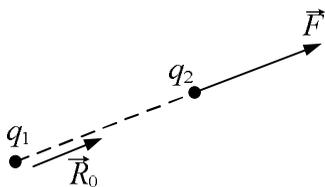


Рис. 1.1. Сила, действующая на заряд  $q_2$  со стороны заряда  $q_1$  при одинаковых знаках зарядов

Под точечными зарядами понимают следующее: линейные размеры тел, на которых расположены взаимодействующие заряды, много меньше расстояния между телами.

---

---

Если заряженные тела находятся не в вакууме, а в однородной, изотропной, т. е. обладающей одинаковыми свойствами во всех направлениях, непроводящей среде, то сила взаимодействия  $\vec{F}$  меньше в  $\epsilon_r$  раз.

Безразмерная величина  $\epsilon_r$  называется *относительной диэлектрической проницаемостью среды*, в которой находятся заряженные тела.

В СИ *заряд* измеряется в кулонах (Кл), *расстояние* – в метрах (м), а *сила* – в ньютонах (Н).

**Пример 1.1.** Определить, с какой силой взаимодействуют два точечных электрических заряда  $q_1 = 0,8 \cdot 10^{-6}$  Кл и  $q_2 = 3,2 \cdot 10^{-6}$  Кл, расположенных в минеральном масле на расстоянии  $R = 20$  см. Относительная диэлектрическая проницаемость минерального масла  $\epsilon_r = 2,2$ .

**Решение.** Для решения используем уравнение (1.1), подставив в него численные значения величин и значение  $\epsilon_r$  минерального масла:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^2} = \frac{0,8 \cdot 10^{-6} \cdot 3,2 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2,2 \cdot 0,2^2} = 0,262 \text{ Н.}$$

### 1.3. Напряженность и потенциал электростатического поля

Основными величинами, характеризующими электростатическое поле, являются напряженность поля  $\vec{E}$  и потенциал  $\phi$ .

Напряженность электростатического поля – величина векторная, определяемая в каждой точке поля своей величиной и направлением. Потенциал – величина скалярная.

Электростатическое поле определено, если известен закон изменения  $\vec{E}$  и  $\phi$  во всех точках этого поля.

Если в электростатическое поле поместить настолько малый положительный заряд, что он своим присутствием не вызовет сколько-нибудь заметного перераспределения зарядов на телах, создающих поле, то отношение силы, действующей на заряд, к величине заряда  $q$  определяет напряженность поля в данной точке:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

Отсюда следует, что сила  $\vec{F}$ , действующая на конечный точечный положительный заряд  $q$ , внесенный в поле, будет равна  $\vec{F} = q\vec{E}$ , а напряженность электрического поля численно равна силе, действующей на неподвижный заряд, равный единице (единичный заряд). Подчеркнем, что вектор напряженности  $\vec{E}$  имеет направление силы, действующей на положительный заряд.

Если поле создается несколькими зарядами ( $q_1, q_2, q_3 \dots$ ), то его напряженность равна геометрической сумме напряженностей от каждого из зарядов в отдельности:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots,$$

т. е. при расчете электрического поля применим метод наложения.

Понятия потенциала и разности потенциалов связаны с работой, совершаемой силами поля при перемещении заряда.

На единичный положительный заряд в любой точке поля действует сила, равная напряженности  $\vec{E}$ . Под разностью потенциалов принято понимать работу сил поля при переносе единичного положительного заряда из одной точки поля в другую:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l},$$

где  $d\vec{l}$  – вектор элемента пути, равный по величине элементу пути  $dl$  и направленный по касательной к пути в сторону перемещения заряженной частицы.

*Потенциал* измеряется в вольтах (В), элемент пути – в метрах (м), напряженность электрического поля – в вольтах на метр (В/м).

Если бы потенциал конечной точки пути 2 был равен 0, то потенциал точки 1 определился бы так:

$$\varphi_1 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l},$$

---

---

т. е. потенциал произвольной точки поля может быть определен как работа сил поля по переносу единичного положительного заряда из данной точки поля в точку поля, потенциал которой равен 0.

За точку, имеющую нулевой потенциал, можно принять любую точку поля. Если такая точка выбрана, то потенциалы всех точек поля определяют относительно этой точки.

Нередко принимают, что точка с нулевым потенциалом находится в бесконечности. Поэтому, особенно в курсе физики, распространено определение потенциала как работы, совершаемой силами поля при переносе единичного заряда из данной точки поля в бесконечность:

$$\varphi_1 = \int_1^{\infty} \vec{E} d\vec{l}.$$

Часто считают, что точка с нулевым потенциалом находится на поверхности Земли.

Таким образом, потенциал любой точки поля зависит от того, какой точке поля придан нулевой потенциал, т. е. потенциал определяется с точностью до постоянной величины. Однако это не имеет существенного значения, так как практически важен не потенциал какой-либо точки поля, а разность потенциалов и производная от потенциала по координатам.

#### 1.4. Электрическое напряжение

Работу сил электрического поля по переносу единичного положительного заряда из одной точки поля в другую называют *электрическим напряжением*  $U$ :

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}.$$

Таким образом, напряжение между двумя точками электрического поля равно разности потенциалов поля в этих точках.

Если электрическое поле между двумя точками равномерное и направление перемещения единичного заряда происходит по направлению линий напряженности, то

$$U_{12} = El, \tag{1.2}$$

где  $l$  – расстояние между точками 1 и 2.

Единица измерения электрического напряжения – вольт (В).

Применяются также производные от вольта: 1 киловольт (кВ) =  $10^3$  В; 1 милливольт (мВ) =  $10^{-3}$  В.

### 1.5. Электростатическое поле – поле потенциальное

В электростатическом поле интеграл  $\int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$  не зависит от выбора пути интегрирования и является только функцией координат точек 1 и 2. Для доказательства этого положения рассмотрим работу сил поля при перемещении электрического заряда по двум разным путям: через точки 3 и 4 (рис. 1.2).

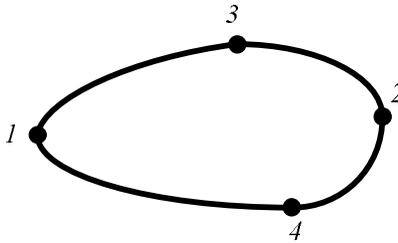


Рис. 1.2. Перемещение из одной точки поля в другую по двум разным путям

Предположим, по замкнутому пути 1, 3, 2, 4, 1 перемещается точечный единичный положительный заряд. На части замкнутого пути движение будет совершаться в направлении сил поля, и работа, затраченная силами поля, будет положительной. На другой части замкнутого пути движение будет происходить против сил поля, и работа сил поля будет отрицательной.

После обхода по замкнутому пути система, включая и точечный заряд, возвращается в исходное состояние и в соответствии с принципом сохранения энергии в электростатическом поле линейный интеграл напряженности поля по любому замкнутому контуру должен быть равен нулю:

---



---


$$\oint \vec{E}d\vec{l} = 0.$$

Отсюда непосредственно вытекает независимость линейного интеграла напряженности поля от выбора пути интегрирования при заданных начальной и конечной точках 1 и 2. Действительно:

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = 0 = \int_{132} \vec{E}d\vec{l} + \int_{241} \vec{E}d\vec{l} = 0,$$

откуда

$$\int_{132} \vec{E}d\vec{l} = - \int_{241} \vec{E}d\vec{l} = \int_{142} \vec{E}d\vec{l}.$$

Так как пути через точки 3 и 4 взяты произвольно, следовательно, интеграл  $\int_1^2 \vec{E}d\vec{l}$ , определяющий разность потенциалов двух точек поля, в электростатическом поле не зависит от выбора пути интегрирования и полностью определяется в заданном поле положением точек 1 и 2. Такое поле носит название *потенциального электрического поля*. Потенциальным является также электрическое поле постоянных токов, протекающих по неподвижным проводникам, при условии, что поле рассматривается вне области действия электродвижущих сил.

### 1.6. Графическое изображение электростатического поля

Электростатическое поле можно наглядно изобразить совокупностью линий напряженности электрического поля (силовых линий) и эквипотенциальных линий.

*Линия напряженности поля* – это мысленно проведенная в поле линия, начинающаяся на положительно заряженном теле и оканчивающаяся на отрицательно заряженном теле. Касательная в каждой точке линии совпадает с направлением вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$  в этой точке. Вдоль линии напряженности электрического поля двигался бы весьма малый положительный заряд, если бы он имел возможность свободно перемещаться в поле и не обладал инерцией.

Поскольку положительный и отрицательный заряды, создающие поле, не могут быть в одной и той же точке, то линии напряженности электрического поля не могут быть линиями, замкнутыми сами на себя.

В электростатическом поле существуют эквипотенциальные поверхности, т. е. совокупность точек поля, имеющих один и тот же потенциал. Следы эквипотенциальных поверхностей на мысленно проведенной плоскости, пересекающей электростатическое поле, образуют эквипотенциальные линии. Эквипотенциальные линии электростатического поля являются замкнутыми на себя линиями. Они пересекаются с линиями напряженности в любой точке поля под прямым углом.

На рисунке 1.3 изображены две заряженные оси с линейной плотностью зарядов  $+τ$  и  $-τ$  и картина поля в плоскости, перпендикулярной этим осям. Под заряженной осью понимают тонкий, теоретически бесконечно длинный металлический проводник (тонкая проволочка);  $τ$  – заряд на единицу длины заряженной оси.

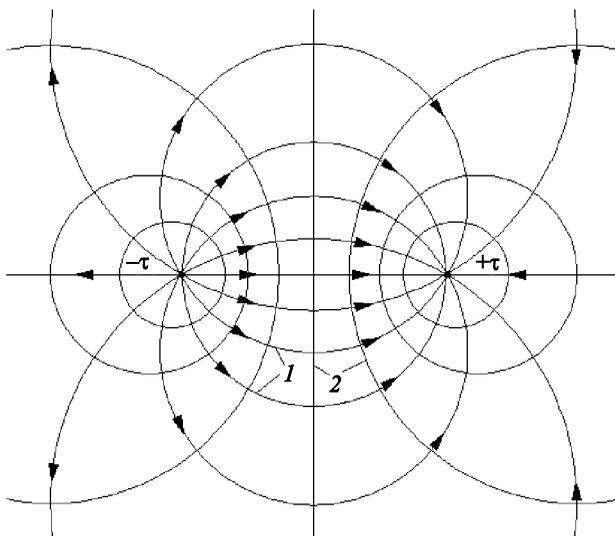


Рис. 1.3. Поле двух заряженных осей:  
1 – линии напряженности; 2 – эквипотенциальные линии

---

---

### 1.7. Поляризация диэлектрика. Вектор электрического смещения

*Диэлектриками* называют вещества, не проводящие электрического тока, в них практически отсутствуют свободные электрические заряды. Диэлектрики обладают связанными электрическими зарядами.

Свободные элементарные частицы (электроны или положительные и отрицательные ионы) под воздействием сил электрического поля могут свободно перемещаться в веществе, их перемещение не ограничивается внутримолекулярными силами.

Под *связанными* понимают электрические заряды, входящие в состав вещества и удерживаемые в определенных положениях внутримолекулярными силами. Сумма положительных связанных зарядов равна сумме отрицательных связанных зарядов. При отсутствии внешнего электрического поля диэлектрик в целом можно считать электрически нейтральным.

Если какое-либо диэлектрическое тело поместить в электрическое поле, оно поляризуется.

Под *поляризацией* понимают упорядоченное изменение расположения связанных зарядов внутри молекул, вызванное электрическим полем. Это изменение расположения проявляется в том, что положительные связанные заряды сместятся в сторону электрического поля, а отрицательные связанные заряды переместятся в противоположном направлении. Если напряженность электрического поля не чрезмерно велика, то частицы с положительными и отрицательными зарядами совершенно разойтись не могут, так как они удерживаются внутримолекулярными силами. В результате поляризации на поверхности вещества как бы обнажаются связанные заряды (рис. 1.4), где они не будут электрически нейтральны.

Связанные заряды при поляризации создают свое поле, напряженность которого  $\vec{E}'$  будет направлена противоположно напряженности  $\vec{E}$  внешнего поля. Поэтому напряженность результирующего поля в диэлектрике будет меньше напряженности внешнего поля.

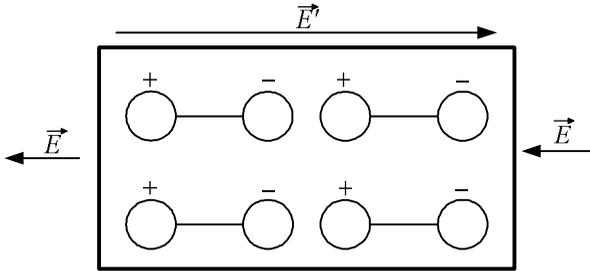


Рис. 1.4. Диэлектрик во внешнем электрическом поле

Степень поляризации диэлектрика характеризуется вектором поляризованности  $\vec{P}$ , который для однородных и изотропных диэлектриков пропорционален напряженности электрического поля в диэлектрике:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_r \vec{E}.$$

Безразмерная величина  $\chi_r$  называется *относительной диэлектрической восприимчивостью*.

В некоторых случаях желательно иметь оценку действия зарядов, создающих электрическое поле, вне зависимости от свойств среды. Это достигается введением в расчеты вектора электрического смещения (электрической индукции)  $\vec{D}$ :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Подставив выражение  $\vec{P}$ , получим

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_r \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} (1 + \chi_r).$$

Обозначим:  $1 + \chi_r = \varepsilon_r$  – относительная диэлектрическая проницаемость;  $\varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_a$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость. Окончательно имеем

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}. \quad (1.3)$$

В СИ  $[D] = [P] =$  кулон на квадратный метр (Кл/м<sup>2</sup>).

Диэлектрическая восприимчивость  $\chi_r$  диэлектриков – величина положительная, поэтому  $\varepsilon_r > 1$ , а  $\varepsilon_a > \varepsilon_0$ .

---

---

## 1.8. Теорема Гаусса

Теорема Гаусса является одной из важнейших теорем электростатики. Она соответствует закону Кулона и принципу наложения. Теорему можно сформулировать и записать следующими способами.

1. Поток вектора электрического смещения через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов, находящихся в объеме, ограниченном этой поверхностью:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum q_{\text{своб}}, \quad (1.4)$$

где  $d\vec{S}$  – вектор элемента поверхности, длина которого численно равна поверхности элемента  $dS$ , а направление совпадает с направлением внешней нормали к этому же элементу (рис. 1.5).

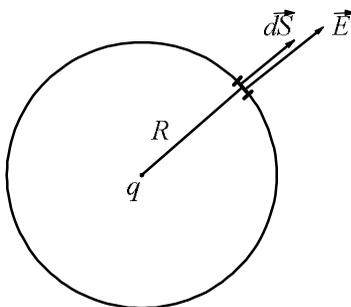


Рис. 1.5. Поток вектора напряженности сквозь замкнутую поверхность

Из уравнения (1.4) следует, что вектор  $\vec{D}$  является такой характеристикой поля, которая при прочих равных условиях не зависит от диэлектрических свойств среды (от величины  $\epsilon_a$ ).

2. Поскольку  $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$ , то теорему Гаусса для однородной и изотропной среды можно записать в такой форме:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum q_{\text{своб}}}{\epsilon_a}, \quad (1.5)$$

т. е. поток вектора напряженности электрического поля сквозь любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов, находящихся в объеме, ограниченном этой поверхностью, разделенной на абсолютную диэлектрическую проницаемость среды  $\epsilon_a$ .

Из уравнения (1.5) следует, что вектор  $\vec{E}$  представляет собой характеристику поля, которая в отличие от вектора  $\vec{D}$  при прочих равных условиях зависит от диэлектрических свойств среды (от величины  $\epsilon_a$ ), и электрическая напряженность  $E$  в диэлектрике слабее, чем в вакууме, при прочих равных условиях.

### 1.9. Электрическая прочность диэлектрика

Диэлектрик, разделяющий проводники с разными электрическими потенциалами (электроизоляция), находится в электрическом поле, и в каждой точке диэлектрика существует определенная напряженность этого поля. Если напряженность электрического поля превысит электрическую прочность диэлектрика, наступит разрушение диэлектрика, он будет пробит.

Напряженность электрического поля, при которой начинается пробой диэлектрика и нарушаются его изоляционные свойства, называют *пробивной напряженностью* или *электрической прочностью диэлектрика*, и обозначают  $E_{пр}$ . Эта величина для изоляционных материалов приводится в электротехнических справочниках.

Отношение электрической прочности диэлектрика к действительной напряженности поля называют запасом электрической прочности диэлектрика:

$$K = \frac{E_{пр}}{E}.$$

Таким образом, изоляция проводников должна быть не только сконструирована, но и рассчитана на определенный запас электрической прочности. Действительную напряженность поля, созданного заряженными электродами определенной формы, можно определить с помощью теоремы Гаусса.

---

---

### 1.10. Проводник в электростатическом поле. Электростатическое экранирование

Проводящие вещества содержат большое количество свободных элементарных частиц, обладающих зарядом (электроны или положительные и отрицательные ионы). Под действием электрического поля эти частицы приходят в упорядоченное движение.

Если внести металлический проводник во внешнее электрическое поле, то под действием сил поля свободные электроны начнут перемещаться по проводнику против поля. На одной части поверхности проводника сосредоточатся отрицательные заряды, на противоположной – положительные (рис. 1.6).

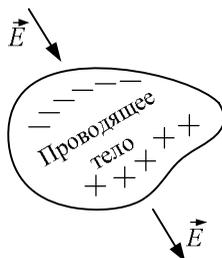


Рис. 1.6. Проводник в электростатическом поле

Поле этих зарядов направлено противоположно внешнему полю. Перераспределение носителей зарядов происходит до тех пор, пока напряженность  $\vec{E}$  поля внутри проводника не станет равной нулю, а потенциал  $\phi$  всех точек тела не станет одинаковым. Если допустить, что потенциалы точек тела различны, то под действием разности потенциалов начнется перемещение зарядов и пойдет ток, т. е. будет выделяться энергия в виде теплоты, что на практике не наблюдается.

Поверхность проводника будет эквипотенциальной поверхностью, а линии напряженности вне проводника перпендикулярны его поверхности.

Если проводнику сообщить электрический заряд, то под действием сил отталкивания элементы этого заряда будут перемещаться по проводнику и сосредотачиваться на его поверхности в слое, ко-

торый можно считать бесконечно тонким. Внутри заряженного проводника поле отсутствует.

Описанное свойство проводников используют в технике при электростатическом экранировании электрической аппаратуры. Экранируемый аппарат помещают в металлическую сетку-экран. В области, ограниченной этим экраном, электрического поля практически не будет.

### 1.11. Поле точечного заряда и поле заряженного шара

В качестве примера использования теоремы Гаусса найдем напряженность поля, создаваемую точечным зарядом  $q$  в точке, удаленной на расстоянии  $R$  от заряда. С этой целью проведем через заданную точку сферическую поверхность радиусом  $R$ , полагая, что заряд находится в центре сферы (см. рис. 1.5), и применим к этой сфере теорему Гаусса:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_a}.$$

В данном примере в каждой точке сферы векторы  $\vec{E}$  и  $d\vec{S}$  совпадают по направлению. Угол между ними равен нулю. В силу симметрии числовое значение  $E$  во всех точках сферы одно и то же, поэтому поток вектора напряженности поля через сферическую поверхность  $S$

$$ES = E 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_a},$$

где  $4\pi R^2$  – площадь сферической поверхности  $S$ .

Следовательно, напряженность, создаваемая точечным зарядом  $q$  на расстоянии  $R$  от него,

$$E = \frac{q}{4\pi R^2 \epsilon_a}. \quad (1.6)$$

В соответствии с теоремой Гаусса напряженность поля заряженного шара имеет такое же выражение. Следовательно, заряд шара можно считать сосредоточенным в центре и рассматривать заряженный шар как точечное заряженное тело. В выражении (1.6)  $R$  – расстояние от центра шара до рассматриваемой точки поля.

Из выражения (1.6) видно, что наибольшая напряженность поля создается на поверхности заряженного шара.

**Пример 1.2.** Чему равен запас электрической прочности воздуха, окружающего заряженный шар, имеющий радиус  $R = 1$  мм, если электрический заряд шара  $q = 0,33 \cdot 10^{-10}$  Кл, пробивная напряженность воздуха  $E_{\text{пр}} = 3 \cdot 10^6$  В/м, абсолютная диэлектрическая проницаемость воздуха  $\epsilon_a = \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м.

**Решение.** Напряженность электрического поля на поверхности шара по уравнению (1.6)

$$E = \frac{q}{4\pi R^2 \epsilon_a} = \frac{0,33 \cdot 10^{-10}}{4 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 0,3 \cdot 10^6 \text{ В/м.}$$

Запас электрической прочности

$$K = \frac{E_{\text{пр}}}{E} = \frac{3 \cdot 10^6}{0,3 \cdot 10^6} = 10.$$

### 1.12. Поле заряженной оси

Рассмотрим электрическое поле заряженной оси с зарядом на единицу длины, равным  $\tau$ .

Диэлектрическая проницаемость среды, окружающей ось, равна  $\epsilon_a$ . Для нахождения напряженности поля в некоторой точке, удаленной на расстояние  $R$  от оси (рис. 1.7), проведем через эту точку цилиндрическую поверхность. Ось цилиндрической поверхности совпадает с заряженной осью. Длина цилиндра равна  $l$ .

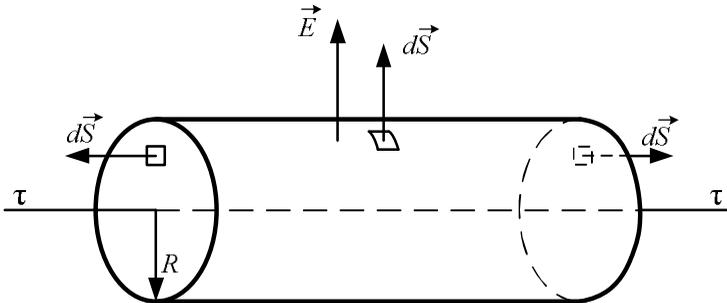


Рис. 1.7. Поле заряженной оси

Используем теорему Гаусса, которая применима для замкнутой поверхности. В рассматриваемом случае замкнутая поверхность образована боковой поверхностью цилиндра и двумя его основаниями. Поток вектора  $\vec{E}$  имеется только через боковую поверхность цилиндра. Через основания поток вектора  $\vec{E}$  отсутствует, так как вектор элемента поверхности  $d\vec{S}$  каждого основания перпендикулярен вектору  $\vec{E}$ .

Вектор  $d\vec{S}$  боковой поверхности и вектор напряженности электрического поля по направлению совпадают. В силу симметрии напряженность  $E$  будет одной и той же во всех точках боковой поверхности цилиндра.

По теореме Гаусса (1.5) поток вектора напряженности электрического поля через боковую поверхность цилиндра

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E 2\pi R l = \frac{\tau l}{\epsilon_a}, \quad (1.7)$$

где  $S = 2\pi R l$  – площадь боковой поверхности цилиндра.

Из выражения (1.7) следует

$$E = \frac{\tau}{2\pi R \epsilon_a}. \quad (1.8)$$

Напряженность в поле заряженной оси изменяется обратно пропорционально расстоянию  $R$  точки от оси. Наибольшая напряженность находится на поверхности заряженной оси.



### Вопросы и задачи для самоконтроля

1. Дайте определение электрического поля.
2. Поясните, какое поле называют электростатическим.
3. Изложите физический смысл вектора напряженности  $\vec{E}$  и потенциала  $\varphi$ .
4. Нарисуйте картину электрического поля, нанесите линии напряженности и эквипотенциальные линии двух заряженных осей.
5. Объясните, чем отличаются свободные заряды от связанных.

- 
- 
6. Запишите теорему Гаусса.
7. Назовите величины, от которых зависит запас электрической прочности диэлектрика.
8. Два одинаковых точечных электрических заряда взаимодействуют в воздухе на расстоянии  $R = 5$  см с силой  $F = 0,144$  Н. Определите величину электрического заряда. Ответ:  $2 \cdot 10^{-7}$  Кл.
9. Напряженность электрического поля на расстоянии 20 см от центра заряженного шара радиусом 4 см составляет 10 В/м. Определите напряженность поля на поверхности шара. Ответ: 250 В/м.

## 2. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И ИХ РАСЧЕТ

---

### 2.1. Электрическая емкость. Конденсаторы

Если к двум электродам (проводникам), разделенным диэлектриком, приложить постоянное электрическое напряжение  $U$ , то электроды приобретут одинаковые по величине и противоположные по знаку электрические заряды. Абсолютная величина заряда  $q$  на каждом из электродов пропорциональна напряжению  $U$ :

$$q = CU, \quad (2.1)$$

где  $C$  – электрическая емкость.

*Единица измерения электрической емкости [C] – фарад (Ф).*

Электрическая емкость электродов, разделенных диэлектриком, зависит от размеров и формы электродов, расстояния между ними, от свойств диэлектрика и не зависит ни от электрического заряда  $q$ , ни от напряжения  $U$  (за исключением использования диэлектриков, изменяющих диэлектрическую проницаемость при изменении напряженности  $E$  электрического поля).

Электрическую емкость подобных систем приходится определять и учитывать при проектировании и расчетах электротехнических и радиотехнических устройств и установок. В электротехнике и радиотехнике широко применяют устройства, специально созданные для использования их электрической емкости, которые называют *электрическими конденсаторами*. Графическое изображение конденсатора в схеме электрической цепи показано на рисунке 2.5.

Фарад – очень крупная единица емкости, поэтому в практических расчетах емкость  $C$  измеряется в более мелких единицах – микро- и пикофарадах:

$$1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}; 1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}.$$

### 2.2. Поле и электрическая емкость плоского конденсатора

Плоский конденсатор имеет две металлические пластины, разделенные диэлектриком (рис. 2.1).

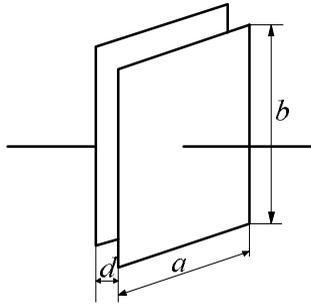


Рис. 2.1. Плоский конденсатор

Расстояние между пластинами обычно мало по сравнению с их длиной и шириной, т. е.  $d \ll a$  и  $d \ll b$ . Если на пластины подать напряжение, то почти все свободные заряды пластин практически равномерно распределятся по внутренним, обращенным друг к другу поверхностям пластин. Искажением поля по краям пластин можно пренебречь. В пространстве между пластинами поле можно считать равномерным, т. е. вектор электрического смещения  $\vec{D}$  постоянен по величине и направлен по нормали к поверхности пластин (рис. 2.2).

Поле с внешней стороны пластин в связи с малой плотностью электрических зарядов пренебрегаем.

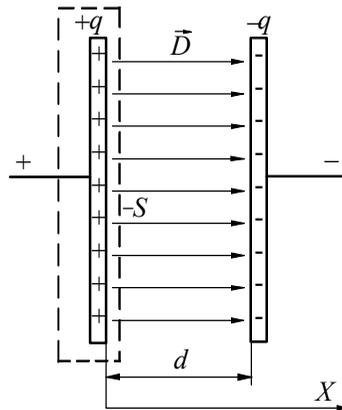


Рис. 2.2. Поле плоского конденсатора

Охватим заряд  $q$  одной из пластин замкнутой поверхностью. След этой поверхности показан на рисунке 2.2 штрихами. Одна сторона этой поверхности идет внутри конденсатора параллельно пластинам.

В соответствии с теоремой Гаусса поток вектора электрического смещения через замкнутую поверхность  $S$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q.$$

Поле практически имеется только в пространстве между пластинами, причем векторы  $\vec{D}$  и  $d\vec{S}$  совпадают по направлению и величина электрического смещения  $\vec{D}$  во всех точках поля одинакова, поэтому

$$\oint_S \vec{D} dS = DS = q,$$

где  $S = ab$  – площадь поверхности пластины.

Следовательно,  $D = \frac{q}{S}$ , а напряженность электрического поля при однородном и изотропном диэлектрике по выражению (1.3)

$$E = \frac{q}{\epsilon_a S}.$$

Для нахождения электрической емкости  $C$  конденсатора напряжение  $U$  между пластинами выразим через заряд  $q$ . Так как поле между пластинами равномерное, то по уравнению (1.2)

$$U = Ed = \frac{q}{\epsilon_a S} d.$$

$$\text{Электрическая емкость конденсатора } C = \frac{q}{U} = \frac{q\epsilon_a S}{qd}.$$

В окончательном виде

$$C = \epsilon_a \frac{S}{d}. \quad (2.2)$$

Как видно из уравнения (2.2), емкость  $C$  зависит от геометрических размеров пластин, их взаимного расположения, электрических свойств диэлектрика.

Увеличения емкости можно достигать увеличением поверхности пластин  $S$ , выбором диэлектрика с высокой относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_r$  и уменьшением расстояния между пластинами  $d$ . Однако уменьшение расстояния  $d$  ограничено электрической прочностью диэлектрика, с уменьшением  $d$  увеличивается напряженность:

$$E = \frac{U}{d}.$$

Любой диэлектрик при определенной напряженности электрического поля пробивается.

**Пример 2.1.** Между одной из пластин плоского конденсатора и наполнителем (парафином) образовался слой воздуха (рис. 2.3).

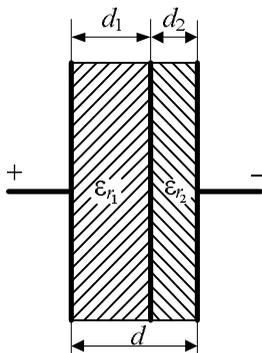


Рис. 2.3. Плоский конденсатор с двумя слоями диэлектрика

Площадь поверхности пластины конденсатора  $S = 200 \text{ см}^2$ , толщина слоя парафина  $d_1 = 0,5 \text{ см}$ , толщина воздушного слоя  $d_2 = 0,1 \text{ см}$ , относительная диэлектрическая проницаемость парафина  $\epsilon_{r_1} = 2$ , воздуха  $\epsilon_{r_2} = 1$ .

Пробивные напряженности для парафина и для воздуха соответственно равны:

$$E_{\text{пр}_1} = 150 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}; \quad E_{\text{пр}_2} = 30 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}.$$

Определить, при каком напряжении этот конденсатор будет пробит, какое напряжение выдержит конденсатор без дефекта (расстояние между пластинами  $d = 0,6 \text{ см}$ ).

**Решение.** Для двухслойного плоского конденсатора напряжение между пластинами

$$U = d_1 E_1 + d_2 E_2.$$

Электрическое смещение  $D = \frac{q}{S}$  не зависит от свойств диэлектрика.

Напряженности

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}}, \quad E_2 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2}},$$

т. е. напряженность будет больше в слое воздуха.

Выразим:

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} E_2; \quad E_1 = \frac{E_2 \varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}}.$$

Для определения напряжения, при котором конденсатор будет пробит, запишем:

$$U = d_1 \frac{E_2 \varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}} + d_2 E_2;$$

$$U = 0,5 \frac{30 \cdot 1}{2} + 0,1 \cdot 30 = 7,5 + 3 = 10,5 \text{ кВ.}$$

Конденсатор без дефекта выдержит напряжение

$$U = d E_1 = 0,6 \cdot 150 = 90 \text{ кВ.}$$

### **2.3. Поле и электрическая емкость цилиндрического конденсатора**

Цилиндрический конденсатор представляет собой два разделенных изоляцией проводящих цилиндра с совпадающими осями, т. е. соосных или коаксиальных (рис. 2.4, а). Примером цилиндрического конденсатора может служить коаксиальный кабель, у которого внутренний провод прокладывается строго по оси кабеля, а другой в виде металлической оплетки охватывает изоляцию центрального проводника. Коаксиальные кабели предназначены для передачи электроэнергии высокой частоты.

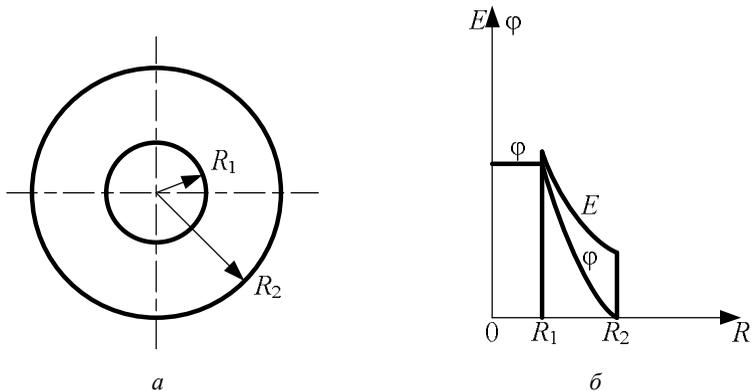


Рис. 2.4. Цилиндрический конденсатор (а), напряженность  $E$  и потенциал  $\phi$  поля конденсатора в зависимости от  $R$  (б)

Пусть внутренний цилиндр радиусом  $R_1$  имеет на единицу длины заряд  $+\tau$ , а внешний цилиндр радиусом  $R_2$  – заряд  $-\tau$ .

Поле зарядов, имеющих на цилиндрической поверхности внутреннего проводника, можно заменить полем зарядов, расположенных на оси кабеля. Так как длина кабеля велика по сравнению с его диаметром, то применимы уравнения (1.7), (1.8) (см. п. 1.12).

Напряженность электрического поля между проводящими цилиндрами на расстоянии  $R$  от оси кабеля по уравнению (1.8)

$$E = \frac{\tau}{2\pi R \epsilon_a}.$$

Напряжение между цилиндрами определяется интегралом:

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dR = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_a} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R} = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_a} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (2.3)$$

Электрическая емкость цилиндрического конденсатора и коаксиального кабеля на единицу длины

$$C = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi \epsilon_a}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (2.4)$$

На рисунке 2.4, б показаны графики изменения потенциала  $\varphi$  и напряженности  $E$  в зависимости от расстояния  $R$  от оси кабеля. Потенциал на поверхности наружного проводника принят равным нулю. При  $R < R_1$  в проводящем внутреннем цилиндре  $\varphi = \text{const} = U$ ,  $E = 0$ . При  $R > R_2$  напряженность  $E = 0$  согласно теореме Гаусса.

Наибольшее значение напряженности поля имеет у поверхности внутреннего цилиндра ( $R = R_1$ ):

$$E_{\max} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} R_1,$$

или, выражая  $\tau$  из формулы (2.3) через  $U$ , получаем

$$E_{\max} = \frac{U}{R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (2.5)$$

**Пример 2.2.** Цилиндрический воздушный конденсатор длиной  $l = 20$  см, радиусом внутреннего цилиндра  $R_1 = 0,5$  см и внешнего  $R_2 = 2,5$  см включен под напряжение 20 кВ. Определить емкость конденсатора, заряд конденсатора, максимальную и минимальную напряженности электрического поля.

**Решение.** Электрическую емкость цилиндрического конденсатора длиной  $l$  находим по выражению (2.4):

$$C = \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,2}{\ln \frac{2,5}{0,5}} = 6,94 \cdot 10^{-12} \text{ Ф.}$$

Заряд конденсатора  $q = CU = 6,94 \cdot 10^{-12} \cdot 20 \cdot 10^3 = 138,9 \cdot 10^{-9}$  Кл.

Заряд конденсатора на единицу длины

$$\tau = \frac{q}{l} = \frac{138,9 \cdot 10^{-9}}{0,2} = 694,7 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м.}$$

Максимальная напряженность поля на поверхности внутреннего цилиндра

$$E_{\max} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{694,7 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}} = 25 \cdot 10^5 \text{ В/м.}$$

Минимальная напряженность поля у поверхности внешнего цилиндра

$$E_{\min} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R_2} = 5 \cdot 10^5 \text{ В/м.}$$

---

---

**Пример 2.3.** Коаксиальный кабель имеет радиус внутренней жилы  $R_1 = 2$  мм и внешней оболочки  $R_2 = 5$  мм. Определить, под какое напряжение можно включить кабель, если максимальная напряженность поля не должна превышать  $1/3$  пробивной напряженности  $E_{\text{пр}}$  диэлектрика, равной  $2 \cdot 10^4$  кВ/м.

**Решение.** Напряженность поля максимальна на поверхности внутреннего цилиндра. По уравнению (2.5)

$$E_{\text{max}} = \frac{U}{R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

По условию  $E_{\text{max}} = \frac{E_{\text{пр}}}{3}$ .

Выражаем  $U = \frac{E_{\text{пр}}}{3} R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}$ . Подставляем значения величин и получаем  $U = 12,2$  кВ.

#### 2.4. Энергия и плотность энергии электрического поля

Система заряженных тел является носителем определенного запаса энергии. Эта энергия сообщается системе внешними источниками в процессе образования зарядов и может быть вновь возвращена источникам или преобразована в другие виды энергии при уменьшении зарядов.

Для получения выражения энергии, запасенной в системе заряженных проводящих тел, рассмотрим работу, совершаемую внешними источниками при образовании зарядов системы.

Пусть конденсатор с емкостью  $C$  через резистор с сопротивлением  $R$  подключен к источнику энергии. Часть элементарной работы, производимой источником энергии при увеличении заряда конденсатора на  $dq$ , равна  $u_C dq$ . Эта работа идет на создание запаса энергии в электрическом поле конденсатора, обозначим ее  $dW_3$ :

$$dW_3 = u_C dq.$$

Для конденсаторов с диэлектриком, у которого диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_r = \text{const}$ , имеем соотношение  $q = Cu_C$ . Следовательно,  $dq = Cdu_C$ , поэтому энергию, запасенную в электриче-

ском поле конденсатора, при изменении напряжения на конденсаторе от 0 до  $U_C$  найдем из выражения

$$W_3 = \int_0^{U_C} C u_C du_C = \frac{C U_C^2}{2}. \quad (2.6)$$

Каждая единица объема диэлектрика, который помещен между электродами конденсатора, является носителем определенного запаса энергии, поэтому можно говорить об объемной плотности энергии электрического поля:

$$\frac{W_3}{V} = \frac{C U^2}{2V},$$

где  $V$  – объем диэлектрика, в котором заключена электрическая энергия  $W_3$ .

*Энергия электрического поля* измеряется в джоулях (Дж), а *объемная плотность энергии* – в джоулях на кубический метр (Дж/м<sup>3</sup>).

Объемную плотность энергии электрического поля рассмотрим на примере плоского конденсатора.

Емкость плоского конденсатора

$$C = \epsilon_a \frac{S}{d},$$

где  $S$  – поверхность пластины,

$d$  – расстояние между пластинами.

Поле между пластинами равномерное, поэтому  $U_C = Ed$ . Используем эти соотношения в уравнении (2.6) и получим

$$W_3 = \epsilon_a \frac{SE^2 d}{2} = \epsilon_a \frac{E^2 V}{2},$$

где  $V = Sd$  – объем диэлектрика, в котором сосредоточено электрическое поле.

Энергия, отнесенная к единице объема поля,

$$\frac{W_3}{V} = \epsilon_a \frac{E^2}{2} = \frac{DE}{2}, \quad (2.7)$$

где  $D = \epsilon_a E$ .

Выражение (2.7) для объемной плотности энергии записано через характеристики электрического поля.

## 2.5. Последовательное соединение конденсаторов

На рисунке 2.5 изображены три конденсатора, соединенные последовательно.

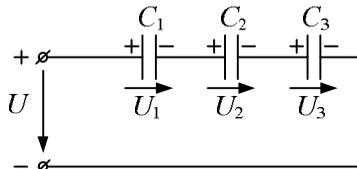


Рис. 2.5. Последовательное соединение конденсаторов

Две крайние обкладки последовательной цепочки конденсаторов присоединены к зажимам источника постоянного напряжения, другие обкладки с источником непосредственно не соединяются и заряжаются вследствие электростатической индукции. Поэтому заряд всех конденсаторов и каждого в отдельности один и тот же:

$$q = q_1 = q_2 = q_3. \quad (2.8)$$

Для упрощения схемы электрической цепи группу конденсаторов можно заменить одним с эквивалентной емкостью  $C_3$ .

Напряжение на группе последовательно соединенных конденсаторов равно сумме напряжений на каждом конденсаторе:

$$U = U_1 + U_2 + U_3.$$

С учетом уравнений (2.1) и (2.8) получим

$$\frac{q}{C_3} = \frac{q}{C_1} = \frac{q}{C_2} = \frac{q}{C_3}.$$

Сокращая последнее выражение на  $q$ , находим

$$\frac{1}{C_3} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}. \quad (2.9)$$

Для определения  $C_3$  нужно найти величину, обратную найденной по уравнению (2.9). В частном случае при последовательном соединении двух конденсаторов с емкостями  $C_1$  и  $C_2$  находим

$$\frac{1}{C_3} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_2 + C_1}{C_1 C_2}. \quad (2.10)$$

Находим значение  $C_3$  как обратное выражению (2.10):

$$C_3 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Если в последовательную цепь соединяется  $n$  конденсаторов одинаковой емкости  $C_n$ , то эквивалентная емкость

$$C_3 = \frac{C_n}{n}.$$

Как видим, последовательное соединение конденсаторов уменьшает эквивалентную емкость. Она будет меньше емкости любого из последовательно соединенных конденсаторов.

Однако при последовательном соединении конденсаторов напряжение сети, в которую включена батарея этих конденсаторов, распределяется между этими конденсаторами в зависимости от их емкости. Чем больше емкость конденсатора, тем меньше на нем напряжение. Таким образом, последовательное соединение конденсаторов применяют для того, чтобы напряжение на каждом конденсаторе не превышало его допустимого рабочего напряжения (во избежание пробоя диэлектрика конденсатора).

## 2.6. Параллельное и смешанное соединение конденсаторов

При параллельном соединении конденсаторов (рис. 2.6)

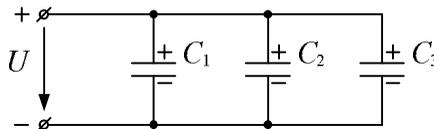


Рис. 2.6. Параллельное соединение конденсаторов

все конденсаторы находятся под одним и тем же напряжением  $U$ , а заряды получаются разными:

$$q_1 = C_1 U; \quad q_2 = C_2 U; \quad q_3 = C_3 U. \quad (2.11)$$

Каждый конденсатор получает заряд независимо от другого, поэтому общий заряд равен сумме зарядов конденсаторов:

$$q = q_1 + q_2 + q_3. \quad (2.12)$$

Подставляя в уравнение (2.12) выражения зарядов из уравнений (2.11) и сокращая на  $U$ , получаем

$$C_3 = C_1 + C_2 + C_3.$$

Эквивалентная емкость равна сумме емкостей. При параллельном соединении  $n$  конденсаторов одинаковой емкости  $C_n$  эквивалентная емкость

$$C_3 = C_1 + nC_n.$$

Как видим, параллельное соединение конденсаторов увеличивает эквивалентную емкость батареи этих конденсаторов.

Смешанное соединение конденсаторов применяют тогда, когда необходимо увеличить емкость батареи и уменьшить напряжение до допустимого рабочего на каждом конденсаторе.

**Пример 2.4.** В схеме на рисунке 2.7 емкости конденсаторов  $C_1 = 20$  мкФ,  $C_2 = 16$  мкФ,  $C_3 = 14$  мкФ, а общее напряжение  $U = 200$  В. Определить заряд и напряжение каждого конденсатора.

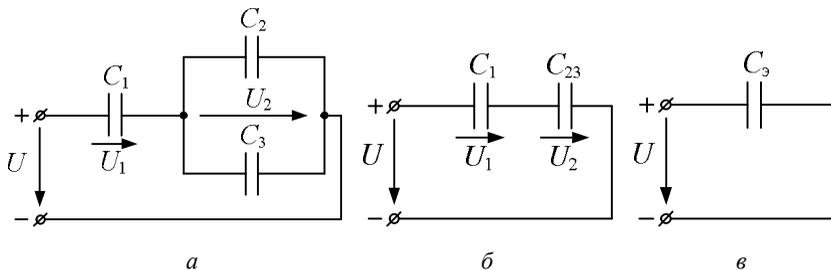


Рис. 2.7. Смешанное соединение конденсаторов и схемы цепей после преобразований

**Решение.** Эквивалентная емкость параллельно включенных конденсаторов  $C_2$  и  $C_3$  (рис. 2.7, а)

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 30 \text{ мкФ.}$$

На упрощенной схеме (рис. 2.7, б) видно, что конденсаторы  $C_1$  и  $C_{23}$  соединены последовательно, эквивалентная емкость этих конденсаторов

$$C_3 = \frac{C_1 C_{23}}{C_1 + C_{23}} = \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 12 \text{ мкФ.}$$

Общий заряд системы конденсаторов на схеме рисунка 2.7, а

$$q = C_3 U = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 200 = 24 \cdot 10^{-4} \text{ Кл.}$$

Такой же заряд имеет место на последовательно соединенных конденсаторах  $C_1$  и  $C_{23}$ :

$$q = q_1 = q_{23} = 24 \cdot 10^{-4} \text{ Кл.}$$

Тогда напряжение на конденсаторах

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{24 \cdot 10^{-4}}{20 \cdot 10^{-6}} = 120 \text{ В; } U_2 = \frac{q_{23}}{C_{23}} = \frac{24 \cdot 10^{-4}}{30 \cdot 10^{-6}} = 80 \text{ В.}$$

Следовательно, заряды конденсаторов  $C_2$  и  $C_3$ :

$$q_2 = C_2 U_2 = 16 \cdot 10^{-6} \cdot 80 = 12,8 \cdot 10^{-4} \text{ Кл;}$$

$$q_3 = C_3 U_2 = 14 \cdot 10^{-6} \cdot 80 = 11,2 \cdot 10^{-4} \text{ Кл.}$$



### Вопросы и задачи для самоконтроля

1. Выразите зависимость электрического заряда конденсатора от его емкости.
2. Назовите величины, определяющие значение электрической емкости плоского конденсатора.
3. Объясните, как влияет диэлектрическая проницаемость диэлектрика на емкость конденсатора.
4. Запишите, чему равна энергия электрического поля конденсатора, его плотность электрической энергии.
5. Запишите формулу для определения эквивалентной емкости последовательно соединенных конденсаторов.
6. Приведите формулу, по которой находят эквивалентную емкость параллельно соединенных конденсаторов.
7. Два электрода, разделенных диэлектриком, имеют равные по величине и противоположные по знаку электрические заряды

---

---

( $q = 0,001$  Кл). Определите напряжение между электродами, если их электрическая емкость  $C = 0,0005$  Ф. Ответ: 2 В.

8. Плоский воздушный конденсатор находится под напряжением 10 кВ. Расстояние между обкладками равно 0,5 см. Определите запас электрической прочности конденсатора, если электрическая прочность воздуха 30 кВ/см. Ответ:  $K = 1,5$ .

9. Между обкладками плоского воздушного конденсатора, имеющими площадь  $S = 3600$  см<sup>2</sup> и напряжение  $U = 2,4$  кВ, расстояние  $d$  составляет 0,5 см. Определите напряженность электрического поля и емкость конденсатора. Ответ:  $E = 48 \cdot 10^4$  В/м;  $C = 0,636 \cdot 10^{-9}$  Ф.

## **3. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА**

---

---

### **3.1. Электрическая цепь**

Электрической цепью называют совокупность соединенных друг с другом источников электрической энергии и приемников, по которым может протекать электрический ток. Электромагнитные процессы в электрической цепи можно описать с помощью таких понятий, как ток, напряжение, электродвижущая сила (ЭДС).

В источниках электрической энергии (гальванические элементы, аккумуляторы, электромагнитные генераторы и т. п.) химическая, механическая, тепловая энергия или энергия других видов превращается в электрическую, а в приемниках электрической энергии (электронагреватели, электрические лампы, электрические двигатели и т. п.) электрическая энергия преобразуется в тепловую, световую, механическую и другие виды энергии.

Электрические цепи, в которых получение электрической энергии в источниках, ее передача и преобразование в приемниках происходят при неизменных во времени токах и напряжениях, называют *цепями постоянного тока*.

Схемой электрической цепи называют ее графическое изображение, содержащее условные обозначения ее элементов и показывающее соединение этих элементов.

На рисунке 3.1, *а* изображена принципиальная схема простейшей электрической цепи с источником электрической энергии – аккумуляторной батареей и с приемником – лампой накаливания. Выводы (зажимы) источника и приемника энергии соединены между собой двумя проводами.

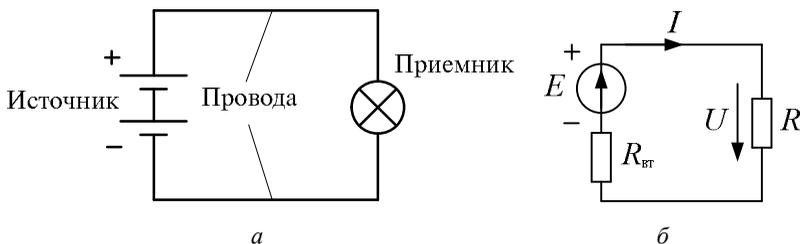


Рис. 3.1. Простейшая электрическая цепь:  
*а* – принципиальная схема; *б* – расчетная схема замещения

Расчеты электрических цепей и исследования процессов, происходящих в них, основываются на различных допущениях и некоторой идеализации реальных объектов электрических цепей. В теории электрических цепей несущественно, какие именно электротехнические устройства включены в электрическую цепь, а важны такие их электрические и магнитные свойства, которые позволяют выполнить расчет токов, напряжений, мощностей.

В цепях постоянного тока у источников электрической энергии необходимо знать электродвижущую силу  $E$  и внутреннее сопротивление  $R_{вт}$ , а у приемника и соединительных проводов – сопротивление  $R$ . На рисунке 3.1, *б* представлена расчетная схема замещения простейшей электрической цепи. Источник энергии изображен в виде последовательного соединения источника ЭДС  $E$  и резистора  $R_{вт}$ , приемник – в виде резистора  $R$ . Сопротивление соединительных проводов не учтено, так как оно намного меньше сопротивления приемника.

При рассмотрении более сложных электрических цепей постоянного тока, имеющих несколько источников энергии, несколько приемников и разнообразные способы их соединения, элементами схем электрических цепей останутся источники ЭДС  $E$  и резисторы  $R$ . Для всего многообразия электротехнических устройств это позволяет выработать единые методики расчета.

### 3.2. Электродвижущая сила

По закону Кулона электрические заряды действуют друг на друга с определенной силой. Причем заряды одного знака отталкиваются, а заряды разных знаков притягиваются.

Внутри источников электрической энергии на электрические заряды действуют силы неэлектростатического происхождения, некулоновы силы. Их называют *сторонними*. Например, разделение зарядов в электропроводной среде происходит под действием электромагнитных сил при движении заряженных частиц в магнитном поле, в результате создается электрическое поле и образуется электродвижущая сила. Сторонние силы создаются и другими процессами (химические реакции, тепловые процессы, контактные явления и т. д.).

Сторонние силы перемещают положительные заряды внутри источника энергии от отрицательного зажима к положительному, т. е. против сил электростатического поля.

Величина, характеризующая способность сторонних сил создавать электрическое поле и вызывать электрический ток, называется *электродвижущей силой*.

Электродвижущая сила  $E$  численно равна работе сторонних сил по переносу единичного положительного заряда через область действия этих сил. Направление действия ЭДС (от отрицательного вывода к положительному) показано на схеме стрелкой (рис. 3.1, б). Стрелка показывает направление возрастания потенциала. Измеряется ЭДС  $E$  в вольтах (В), так же как потенциал и напряжение.

Благодаря ЭДС во внешней части цепи создается постоянно действующее электрическое поле, и в замкнутом контуре простейшей электрической цепи возникает ток  $I$ .

### 3.3. Электрический ток

Электрический ток в проводящей среде есть упорядоченное движение заряженных частиц внутри проводника под действием сил электрического поля.

Проводники делят на два вида в зависимости от типа носителей электрического заряда, образующих электрический ток. В провод-

---

---

никах первого вида (металлах) ток образуется свободными электронами. В проводниках второго вида (расплавленные соли, растворы солей, кислот, щелочей) носителями электрического заряда являются ионы – заряженные атомы и молекулы. Под действием сил электрического поля положительно заряженные частицы движутся по направлению поля, а отрицательные – в обратном направлении.

Интенсивность электрического тока оценивается физической величиной, называемой *силой электрического тока*. В практике эту величину называют *электрическим током* или просто *током*.

Величина тока проводимости определяется электрическим зарядом всех частиц, проходящих через поперечное сечение проводника в единицу времени. Предположим, через поперечное сечение проводника  $S$  за время  $t$  равномерно проходит  $n$  электронов. Заряд каждого электрона –  $e$ , поэтому общий заряд частиц, прошедших через сечение за это время,  $q = en$ .

Отношение

$$\frac{q}{t} = \frac{en}{t} = I$$

выражает заряд, перенесенный электронами через сечение проводника за 1 с, т. е. ток  $I$ .

*Единица измерения электрического тока* – ампер (А). На практике применяют производные от ампера: 1 килоампер (кА) =  $10^3$  А – для измерения больших токов; 1 миллиампер (мА) =  $10^{-3}$  А и 1 микроампер (мкА) =  $10^{-6}$  А – для измерения малых токов.

Положительным направлением электрического тока условно принято считать направление, в котором движутся положительно заряженные частицы. На рисунке 3.1, б направление тока  $I$  показано стрелкой во внешней цепи от положительного вывода источника энергии к отрицательному, т. е. совпадающим с направлением ЭДС. В металлах положительное направление тока противоположно направлению движения электронов.

Электрический ток, длительно не изменяющийся по величине и направлению, называется *постоянным* (рис. 3.2, график  $I$ ).

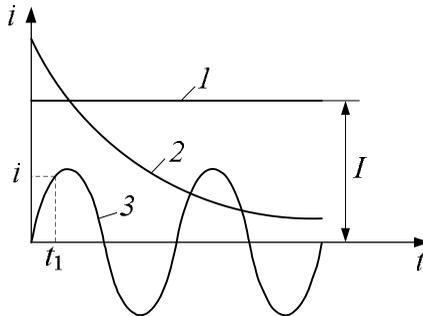


Рис. 3.2. Графики зависимости электрических токов от времени

Для постоянного тока характерно прохождение электрического заряда через поперечное сечение проводника в одном направлении с одинаковой интенсивностью.

Если ток со временем изменяется, то он называется *переменным* (рис. 3.2, графики 2, 3). В таком случае по оси ординат на графиках откладываются мгновенные значения тока, которые определяются изменением заряда  $q$  за бесконечно малый промежуток времени:

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

На графике 3 (рис. 3.2) показан мгновенный ток  $i(t_1)$  в момент времени  $t_1$ .

В практических расчетах пользуются понятием плотности электрического тока  $J$ . При токе в проводнике  $I$  и поперечном сечении проводника  $S$  численно плотность тока определяется отношением

$$J = \frac{I}{S}. \quad (3.1)$$

*Единица измерения плотности тока* — ампер на квадратный метр ( $\text{А/м}^2$ ).

На практике площадь поперечного сечения проводов чаще выражают в квадратных миллиметрах ( $\text{мм}^2$ ) и соответственно плотность тока — в амперах на квадратный миллиметр ( $\text{А/мм}^2$ ).

---

---

При постоянном токе, несмотря на движение заряженных частиц в проводнике, распределение заряда в нем стационарно, так как в любом элементе объема за некоторый промежуток времени заряд уходящих и входящих частиц одинаков.

Электрическое поле, создаваемое движущимися заряженными частицами в проводнике, называется *стационарным* в отличие от электростатического, создаваемого неподвижными заряженными частицами.

Электрический ток в проводнике и соответствующее ему стационарное электрическое поле нужно поддерживать, непрерывно пополняя энергию поля, которая расходуется в связи с движением заряженных частиц, превращаясь в теплоту.

### 3.4. Электрическое сопротивление. Закон Ома

*Электрическое сопротивление* – это противодействие, которое атомы и молекулы проводника оказывают направленному движению зарядов в проводнике.

В 1826 г. Георг Ом экспериментально получил формулу для определения сопротивления участка проводника:

$$R = \frac{U}{I}. \quad (3.2)$$

Для практических целей представляет интерес определение сопротивления участка проводника, если известны его форма и размеры.

Рассмотрим отрезок проводника длиной  $l$  и поперечным сечением  $S$  (рис. 3.3).

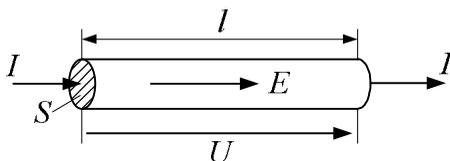


Рис. 3.3. Участок проводника с током

Наличие тока означает, что в проводнике существует электрическое поле с напряженностью  $E$ .

Электрическое поле можно принять равномерным, тогда по уравнению (1.2) напряжение на проводнике

$$U = El.$$

Плотность электрического тока в проводнике выражается произведением напряженности электрического поля  $E$  и удельной электрической проводимости  $\gamma$ :

$$J = \gamma E.$$

Удельная электрическая проводимость  $\gamma$  характеризует электропроводность вещества. В электротехнических справочниках приводятся значения удельной электрической проводимости материалов или обратной ей величины удельного сопротивления:

$$\rho = \frac{1}{\gamma}.$$

Считая, что ток равномерно распределен по сечению ( $J = \text{const}$ ), и учитывая уравнения (3.1) и (3.2), можно записать выражение сопротивления проводника через его размеры:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{El}{\gamma ES} = \frac{l}{\gamma S} = \rho \frac{l}{S}.$$

Наряду с сопротивлением для расчета цепей вводят понятие *проводимости* – величины, обратной сопротивлению:

$$g = \frac{1}{R}.$$

*Единицей электрического сопротивления* является сопротивление такого проводника, в котором при напряжении 1 В устанавливается ток 1 А:  $[R] = \left[ \frac{U}{I} \right] = \text{вольт-ампер (ВА)} = \text{ом (Ом)}$ .

*Единица измерения проводимости* – 1/Ом = сименс (См).

*Единица измерения удельной проводимости* – 1/(Ом · м); *удельного сопротивления* – Ом · м.

Из уравнения (3.2) следует

---

---

$$I = \frac{U}{R}. \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) является математическим выражением закона Ома для участка проводника.

**Ток в проводнике равен отношению напряжения на участке проводника к электрическому сопротивлению этого участка.**

Выражения  $U = RI$  и  $R = \frac{U}{I}$  являются производными закона

Ома для участка проводника.

Графическое изображение электрического сопротивления  $R$  представлено на рисунке 3.1, б. Элемент цепи, обозначенный  $R$ , называют резистором или резистивным элементом цепи, предназначенным для использования его электрического сопротивления.

Положительное направление напряжения  $U$  на резистивном элементе  $R$  совпадает по направлению с током  $I$ . Ток через резистор  $R$  идет от большего потенциала к меньшему.

Важно отметить, что линии, соединяющие резисторы и источники ЭДС в расчетных схемах (см. рис. 3.1, б), являются проводниками, но их сопротивлением пренебрегают (т. е. считают равным нулю) и учитывают при расчете цепи только сопротивления резисторов  $R$ .

В общем случае сопротивление  $R$  зависит от тока  $I$ . Металлы нагреваются при прохождении тока через них. При увеличении температуры проводника усиливается тепловое хаотическое движение частиц, что увеличивает число столкновений и затрудняет упорядоченное движение электронов.

Сопротивление полупроводников изменяется при изменении величины и направления тока.

На практике часто бывает задана не зависимость сопротивления от тока  $R(I)$  резистивного элемента, представляющего приемник на схеме, а зависимость напряжения на резистивном элементе от тока  $U(I)$  или обратная зависимость тока от напряжения  $I(U)$ . Характеристики  $U(I)$  и  $I(U)$  получили название *вольт-амперных характеристик* (ВАХ).

Вольт-амперные характеристики могут быть нелинейными (рис. 3.4) и линейными (рис. 3.5). Следовательно, электрические цепи, содержащие элементы с нелинейными характеристиками, называют нелинейными, а цепи, содержащие только элементы с линейными характеристиками, называют линейными.

Для нелинейных резистивных элементов характерно сопротивление, которое зависит от тока. Так, судя по ВАХ (см. рис. 3.4), сопротивление элемента 1 падает с ростом тока, а сопротивление элемента 2 растет. Режимы работы большого числа реальных электрических цепей можно отнести к линейным (см. рис. 3.5), поэтому изучение свойств и методов расчета линейных электрических цепей представляет значительный практический интерес. У линейных резистивных элементов сопротивление  $R$  неизменно, не зависит от тока; ЭДС  $E$  источников в линейных цепях также считается постоянной.

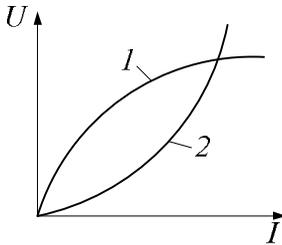


Рис. 3.4. ВАХ нелинейных элементов электрической цепи

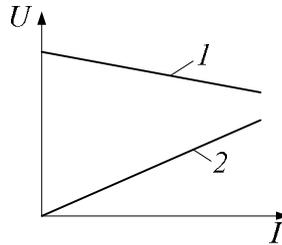


Рис. 3.5. ВАХ линейных элементов электрической цепи

**Пример 3.1.** Катушка из медной проволоки имеет  $N = 2000$  витков, средний диаметр витка  $D = 127$  мм, диаметр проволоки  $d = 2$  мм. Определить сопротивление провода катушки, если удельное сопротивление меди при  $t = 20$  °С  $\rho = 0,0175$  Ом  $\cdot$  мм<sup>2</sup>/м.

**Решение.** Определим длину медной проволоки, умножив длину окружности среднего витка на число витков:

$$l = \pi DN = 3,14 \cdot 127 \cdot 10^{-3} \cdot 2000 \approx 800 \text{ м.}$$

Сечение медного провода

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 2^2}{4} = 3,14 \text{ мм}^2.$$

---

---

Определим сопротивление провода катушки:

$$R = \rho \frac{l}{S} = 0,0175 \frac{800}{3,14} = 4,45 \text{ Ом.}$$

### 3.5. Энергия и мощность источника ЭДС

Работа сторонних сил в источнике ЭДС по переносу единичного положительного заряда равна ЭДС  $E$ . Следовательно, работа сторонних сил по перемещению всего электрического заряда  $q$ , создающего электрический ток, равна  $Eq$ .

Работа сторонних сил равна энергии, отдаваемой источником питания во внешнюю цепь. Эта энергия называется *электрической энергией источника*:

$$W_{\text{и}} = Eq.$$

Перемещенный заряд  $q$  можно выразить через ток в источнике:  $q = It$ , поэтому

$$W_{\text{и}} = EIt. \quad (3.4)$$

Формула (3.4) позволяет подсчитать энергию, выработанную источником за определенный промежуток времени  $t$ . Для оценки работоспособности источника нужно определить энергию, выработанную источником в единицу времени, т. е. за 1 с.

Энергия, вырабатываемая в единицу времени, называется *мощностью источника*:

$$P_{\text{и}} = \frac{W_{\text{и}}}{t} = \frac{EIt}{t};$$
$$P_{\text{и}} = EI. \quad (3.5)$$

*Единица измерения энергии* – джоуль (Дж).

*Единица измерения мощности*  $[P] = \left[ \frac{W}{t} \right] = \text{джоуль-секунда} =$   
 $= \text{ватт (Вт)}.$

Из формулы (3.5) следует, что  
ватт = вольт-ампер; джоуль = вольт-ампер-секунда = ватт-секунда.

Указанные единицы измерения мощности и энергии являются основными. Измерять большие мощности и количество энергии

удобнее более крупными единицами, чем ватт и джоуль. Поэтому пользуются производными единицами:

1 киловатт (кВт) =  $10^3$  Вт; 1 мегаватт (МВт) =  $10^6$  Вт;

1 киловатт-час (кВт · ч) =  $1000 \cdot 3600 = 36 \cdot 10^5$  Вт · с (или Дж).

### 3.6. Преобразование электрической энергии в тепловую

Электрические заряды, движущиеся в проводнике под действием сил электрического поля, сталкиваются с элементарными частицами атомов и молекул проводника. При каждом столкновении движущиеся электрические заряды отдают энергию, при этом проводник нагревается за счет работы сил электрического поля.

Выразим количество выделенной тепловой энергии через напряжение и ток. Предположим, что в проводнике, имеющем на концах разность потенциалов  $U$ , заряд перемещенных частиц  $q = It$ .

Энергия электрического поля, затраченная на перемещение заряженных частиц,

$$W_3 = Uq = UIt.$$

Работа сил электрического поля расходуется на нагревание проводника. Поэтому энергию  $W_3$  можно считать равной тепловой энергии приемника:

$$W_n = W_3 = UIt.$$

Согласно закону Ома,  $U = IR$ , тогда

$$W_n = I^2 R t. \quad (3.6)$$

Формула (3.6) является математическим выражением *закона Джоуля – Ленца*.

**Количество электрической энергии, преобразуемой в проводнике в тепловую энергию, пропорционально квадрату тока и электрическому сопротивлению проводника.**

Скорость преобразования электрической энергии в другой вид энергии в приемнике называется *мощностью приемника*:

$$P_n = \frac{W_n}{t} = UI. \quad (3.7)$$

---

---

Формула (3.7) справедлива для любого приемника независимо от вида энергии, который получается в результате преобразования.

Если электрическая энергия полностью превращается в тепловую, то мощность приемника можно выразить через ток в проводнике и его сопротивление:

$$P_{\text{п}} = I^2 R.$$

Явление преобразования в проводниках электрической энергии в тепловую широко используется на практике. На этом принципе основано действие большинства электрических промышленных и бытовых нагревательных устройств.

### 3.7. Преобразование электрической энергии в световую

Принцип преобразования электрической энергии в световую лежит также в основе работы электрических ламп накаливания. Нить лампы, изготовленная из тугоплавкого металла (вольфрама), нагревается при электрическом токе до температуры 3000 °С.

При высокой температуре нити лампы часть энергии излучается в виде световой энергии, которая в общем потоке тепловой энергии, излучаемой лампой, составляет менее 10 %.

**Пример 3.2.** Электропечь мощностью 1000 Вт при напряжении 220 В присоединена к распределительному щитку алюминиевыми проводами сечением  $S = 5 \text{ мм}^2$  и длиной 50 м (в одну сторону). Определить ток, сопротивления электропечи и соединительных проводов, мощность потерь энергии и падение напряжения в проводах.

**Решение.** Ток в электропечи

$$I = \frac{P_{\text{п}}}{U} = \frac{1000}{220} = 4,54 \text{ А.}$$

Сопротивление электропечи

$$R_{\text{п}} = \frac{U}{I} = \frac{220}{4,54} = 48,4 \text{ Ом.}$$

Сопротивление соединительных проводов (линии) при удельном сопротивлении алюминия  $\rho = 0,029 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}$  ( $t = 20 \text{ °С}$ )

$$R_{\text{л}} = \rho \frac{l}{S} = 0,029 \cdot 10^{-6} \frac{50 \cdot 2}{5 \cdot 10^{-6}} = 0,58 \text{ Ом.}$$

Мощность потерь энергии в соединительных проводах (линии)

$$P_{\text{л}} = I^2 R_{\text{л}} = 4,54^2 \cdot 0,58 = 11,2 \text{ Вт.}$$

Падение напряжения в проводах

$$U_{\text{л}} = IR_{\text{л}} = 4,54 \cdot 0,58 = 2,63 \text{ В.}$$

### 3.8. Режимы электрических цепей

Источники и приемники электрической энергии, провода, а также вспомогательные аппараты и приборы характеризуются номинальными величинами тока, напряжения, мощности и так далее, на которые эти устройства рассчитаны заводами-изготовителями для нормальной работы. Номинальные величины обычно указываются в паспорте устройства.

Режим работы, при котором действительные токи, напряжения, мощности элементов электрической цепи соответствуют их номинальным величинам, называется *номинальным* (*нормальным*).

Если в электрической цепи действительные характеристики режима отличаются от номинальных величин ее элементов, но отклонения находятся в допустимых пределах, режим называется *рабочим*. На рисунке 3.6 представлена схема простейшей электрической цепи с переменным сопротивлением  $R$  приемника.

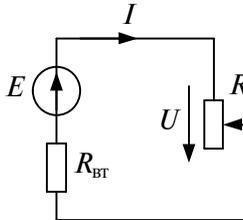


Рис. 3.6. Схема простейшей электрической цепи с переменным сопротивлением  $R$  приемника

Применяя к этой цепи закон сохранения энергии, составим уравнение энергетического баланса за некоторое время:

---

---

$$W_{\text{и}} = W_{\text{п}} + W_{\text{вт}},$$

где  $W_{\text{и}} = EIt$  – энергия источника;

$W_{\text{п}} = I^2 R t$  – энергия приемника;

$W_{\text{вт}} = I^2 R_{\text{вт}} t$  – энергия потерь на внутреннем сопротивлении источника.

Энергетический баланс принимает следующий вид:

$$EIt = I^2 R t + I^2 R_{\text{вт}} t.$$

После сокращения на  $t$  получим уравнение баланса мощностей:

$$EI = I^2 R + I^2 R_{\text{вт}}.$$

Далее, сокращая на  $I$ , получаем уравнение баланса напряжений:

$$E = IR + IR_{\text{вт}}, \text{ или } E = U + U_{\text{вт}},$$

где  $U_{\text{вт}}$  – падение напряжения на внутреннем сопротивлении источника.

Ток в цепи

$$I = \frac{E}{R + R_{\text{вт}}}. \quad (3.8)$$

Формула (3.8) является выражением *закона Ома для простейшей цепи*.

Напряжение  $U$  на приемнике, равно в этом случае напряжению на внешних зажимах источника, меньше ЭДС источника на величину внутреннего падения напряжения  $IR_{\text{вт}}$ :

$$U = E - IR_{\text{вт}}. \quad (3.9)$$

Для обеспечения нормальных условий работы приемников электрической энергии необходимо соблюдать соответствие напряжений: действительное напряжение на зажимах приемника должно быть равно его номинальному напряжению.

Коэффициент полезного действия источника определяется отношением мощности приемника  $P_{\text{п}}$  к мощности источника  $P_{\text{и}}$ :

$$\eta = \frac{P_{\text{п}}}{P_{\text{и}}}.$$

При сопротивлении  $R = \infty$  тока в цепи не будет, это соответствует размыканию цепи. Режим электрической цепи или отдельных

источников, при котором ток в них равен нулю, называется *режимом холостого хода*. При холостом ходе напряжение на внешних зажимах источника равно его ЭДС (уравнение (3.9)):

$$U_{x,x} = E.$$

Согласно выражению (3.8), при  $R = 0$

$$I = \frac{E}{R_{вт}} = I_k, \quad (3.10)$$

а напряжение на зажимах приемника  $U = 0$ .

Режим электрической цепи, при котором накоротко замкнут участок с одним или несколькими элементами, в связи с чем напряжение на этом участке равно нулю, называется *режимом короткого замыкания*.

Короткие замыкания в электрических установках нежелательны, поскольку токи короткого замыкания, как правило, в несколько раз превышают номинальные значения, что ведет к резкому увеличению выделения теплоты в токоведущих частях и, следовательно, к порче электрических установок.

Напряжение на зажимах источника энергии уменьшается от  $U_{x,x} = E$  до  $U = 0$ , если ток нагрузки увеличивается от нуля до тока короткого замыкания  $I_k$ . График изменения напряжения на источнике  $U$  в зависимости от  $I$  на участке от  $I = 0$  до  $I$ , равного номинальному, показан линией  $I$  на рисунке 3.5.

**Пример 3.3.** Ток короткого замыкания источника энергии  $I_k = 40$  А. При подключении к источнику резистора с сопротивлением  $R = 30$  Ом ток в цепи уменьшился до 10 А. Определить внутреннее сопротивление источника.

**Решение.** При коротком замыкании по уравнению (3.10)

$$E = I_k R_{вт} = 40 \cdot R_{вт}.$$

В рабочем режиме по уравнению (3.8)

$$E = I(R + R_{вт}) = 10(30 + R_{вт}).$$

Следовательно,

$$40 \cdot R_{вт} = 10(30 + R_{вт});$$

$$40 \cdot R_{вт} - 10R_{вт} = 300;$$

$$R_{вт} = 10 \text{ Ом}.$$

### 3.9. Схемы замещения источников энергии

Чаще всего источник энергии на расчетных схемах замещения представляют в виде источника ЭДС  $E$  с последовательно присоединенным внутренним сопротивлением  $R_{\text{вт}}$ , как показано на рисунке 3.6. Учитывая, что внутреннее сопротивление источников энергии обычно мало в сравнении с сопротивлением приемника, на расчетных схемах источник энергии можно представить только источником ЭДС без внутреннего сопротивления (рис. 3.7, а).

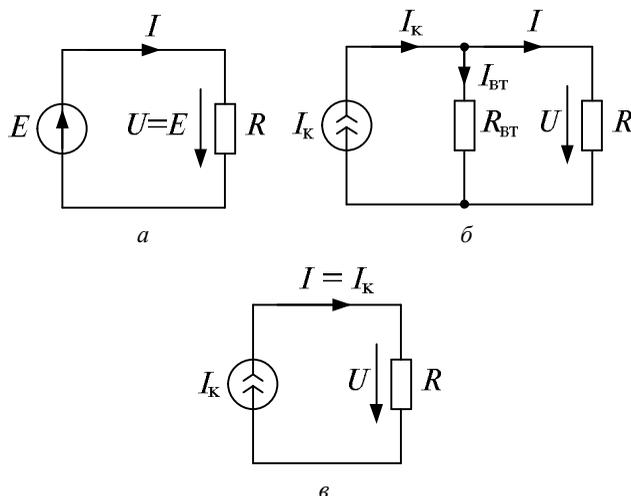


Рис. 3.7. Схемы замещения источников энергии:  
а – с идеальным источником ЭДС; б – с источником тока;  
в – с идеальным источником тока

При  $R_{\text{вт}} = 0$  внутреннее падение напряжения  $U_{\text{вт}} = 0$ , поэтому напряжение на зажимах источника энергии при любом токе равно ЭДС:

$$U = E = \text{const.}$$

Такой источник энергии назвали источником ЭДС.

В некоторых случаях источник электрической энергии на расчетной схеме заменяют другой (эквивалентной) схемой (рис. 3.7, б), где вместо ЭДС  $E$  источник характеризуется его током короткого

замыкания  $I_k$ , а внутреннее сопротивление присоединяют параллельно источнику тока и приемнику  $R$ .

Возможность такой замены можно доказать, разделив равенство (3.9) на  $R_{вт}$ :

$$\frac{U}{R_{вт}} = \frac{E}{R_{вт}} - I, \quad (3.11)$$

где  $\frac{U}{R_{вт}} = I_{вт}$  – ток, равный отношению напряжения на приемнике к внутреннему сопротивлению;

$$\frac{E}{R_{вт}} = I_k \text{ – ток короткого замыкания источника;}$$

$$I = \frac{U}{R} \text{ – ток приемника.}$$

Вводя новые обозначения в выражение (3.11), получаем

$$I_k = I_{вт} + I,$$

которому удовлетворяет схема 3.7, б.

Если  $R_{вт} \gg R$ , что характерно для радиосхем, то можно принять  $R_{вт} = \infty$  и  $I_{вт} = 0$ . В таком случае при любой величине сопротивления приемника  $R$  его ток остается равным току короткого замыкания источника энергии (рис. 3.7, в):

$$I = I_k = \text{const.}$$

Графическое изображение источника тока, показанное на рисунках 3.7, б и 3.7, в, указывает направление тока и напоминает, что внутреннее сопротивление источника тока равно бесконечности. В дальнейшем для буквенного обозначения тока источника тока принимают  $J$ .

Источники ЭДС и источники тока называют активными элементами электрической цепи.

Элементы цепи, в которых электрическая энергия преобразуется в тепловую, характеризующиеся сопротивлением  $R$  или проводимостью  $g$ , называют *пассивными*.

### 3.10. Схема замещения разветвленной электрической цепи

На рисунке 3.8 изображена разветвленная электрическая цепь и ее расчетная схема замещения, указаны положительные направления токов и напряжений.

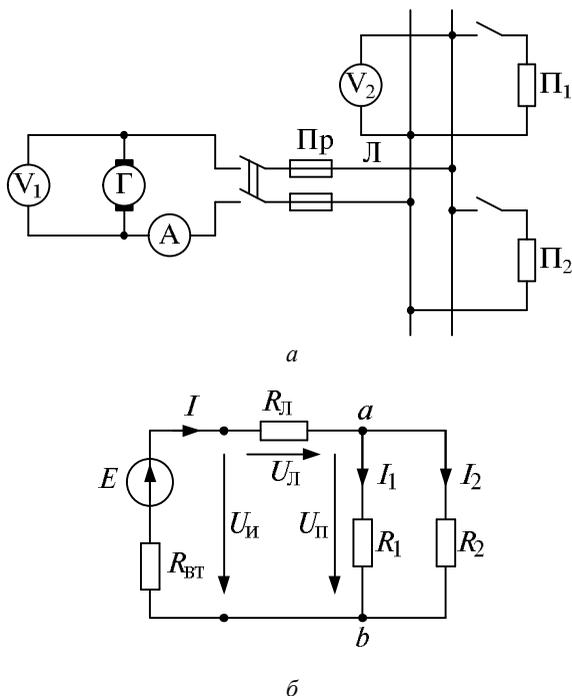


Рис. 3.8. Разветвленная электрическая цепь:  
 $a$  – принципиальная схема;  $b$  – расчетная схема замещения

В схеме замещения генератор  $\Gamma$  электрической энергии представлен ЭДС  $E$  и внутренним сопротивлением  $R_{вт}$ , а два приемника  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  – соответственно сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$ . Сопротивление проводов линии  $L$  представлено сосредоточенным сопротивлением  $R_L$ . Измерительные приборы в схеме замещения отсутствуют, так как амперметры, включаемые для измерения тока, имеют малое

внутреннее сопротивление, а вольтметры, подключенные параллельно участкам цепи, имеют большое внутреннее сопротивление. Таким образом, измерительные приборы на результаты расчета токов в рабочей части цепи влияют незначительно. В схеме замещения контакты коммутирующей аппаратуры показаны замкнутыми, что создает наибольшее значение тока.

На рисунке 3.8, б стрелками показаны положительные направления ЭДС, напряжений и токов.

Полярность зажимов источника ЭДС может не обозначаться, достаточно показать направление ЭДС стрелкой. Внутри источника ЭДС направлена от отрицательного зажима к положительному (так же как и ток).

Положительное направление напряжения на пассивных участках цепи совпадает с направлением тока – от точки большего потенциала к точке меньшего. У приемника направления напряжения и тока совпадают, у источника они противоположны.

В геометрической конфигурации схемы замещения разветвленной электрической цепи образуются ветви, узлы и контуры.

*Ветвь* электрической цепи называют участок, вдоль которого электрический ток один и тот же. Ветвь заключена между двумя узлами и образуется одним или несколькими последовательно соединенными элементами цепи.

*Узел* электрической цепи – это место соединения не менее трех ветвей.

*Контуром* электрической цепи называют замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям, при этом каждый узел в рассматриваемом контуре встречается не более одного раза.

На рисунке 3.8, б электрическая цепь имеет два узла, три ветви и два независимых контура. Независимые контуры электрической цепи содержат хотя бы одну новую ветвь.

В схеме электрической цепи узел как место электрического контакта нескольких ветвей показывают видимой точкой.

Несмотря на кажущееся различие, схемы а и б (рис. 3.9) в электрическом смысле одинаковы, так как имеют одинаковые элементы, четыре ветви и один узел.

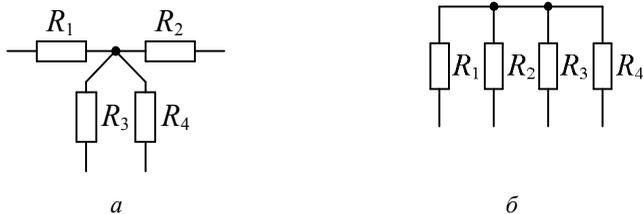


Рис. 3.9. Изображения ветвей и узлов электрической схемы

Ветви, присоединенные к одной паре узлов, называют *параллельными*. На рисунке 3.8, б три ветви электрической цепи присоединены к одной паре узлов, следовательно, они соединены параллельно и находятся под одним и тем же напряжением.

Любую часть электрической цепи, имеющую два зажима (полюса), называют *двухполюсником*. На схеме его условно обозначают прямоугольником с двумя выводами *m*. На рисунке 3.10 показаны активный и пассивный двухполюсники.



Рис. 3.10. Условное обозначение двухполюсников:  
а – активного; б – пассивного

*Активным* называют двухполюсник, содержащий источники электрической энергии. Для линейного активного двухполюсника обязательным дополнительным условием является наличие на его разомкнутых зажимах напряжения, обусловленного источником энергии внутри двухполюсника.

*Пассивный* двухполюсник не содержит источников электрической энергии.



### Вопросы и задачи для самоконтроля

1. Дайте определение электрической цепи, электрического тока.
2. Назовите примеры источников и приемников электрической энергии.

3. Нарисуйте схему замещения электрической цепи, представив в ней источники и приемники электрической энергии.

4. Определите величину тока в электрической цепи с источником ЭДС и резистором.

5. Дайте определение электрического сопротивления участка проводника.

6. Сформулируйте и запишите закон Ома для участка проводника.

7. Запишите формулы расчета мощности источника и мощности приемника.

8. Сформулируйте и запишите закон Джоуля – Ленца.

9. Запишите закон Ома для простейшей электрической цепи.

10. Сформулируйте понятия ветвь, узел, контур разветвленной электрической цепи.

11. В проводнике ток  $I = 5$  А. Определите электрический заряд, прошедший через поперечное сечение проводника за 4 с. Ответ: 20 Кл.

12. У одиночного провода в закрытом помещении сечением  $S = 5$  мм<sup>2</sup> допустимая плотность тока  $J = 10$  А/мм<sup>2</sup>. Определите допустимый ток  $I$ . Ответ: 50 А.

13. Определите сопротивление алюминиевого провода двухпроводной линии передачи, если сечение провода 10 мм<sup>2</sup>, длина линии передачи 1 км. Удельное сопротивление алюминия  $\rho = 0,029 \cdot 10^{-6}$  Ом · м при  $t = 20$  °С. Ответ: 5,8 Ом.

14. Генератор постоянного тока выработал за месяц энергию в количестве 72 000 кВт · ч. Амперметр в цепи генератора за время работы показывал 1000 А. Определите ЭДС и мощность генератора. Ответ: 100 В; 100 кВт.

15. Аккумуляторная батарея при разряде работала с током  $I = 50$  А в течение 10 ч. Определите мощность батареи и количество выработанной энергии, если ее ЭДС в течение всего периода работы оставалась постоянной и равной 20 В. Ответ: 1000 Вт; 10 кВт · ч.

16. Мощность лампы накаливания 100 Вт при напряжении 220 В. Определите ток и сопротивление лампы. Ответ: 0,45 А; 488 Ом.

---

---

17. К источнику энергии подключен резистор  $R = 30$  Ом, напряжение на зажимах которого  $U_R = 60$  В. Напряжение источника в режиме холостого хода  $U_{x.x} = 66$  В. Определите внутреннее сопротивление источника. Ответ: 3 Ом.

18. ЭДС источника  $E = 20$  В, ток короткого замыкания  $I_k = 10$  А. Определите ток цепи при подключении приемника с сопротивлением  $R = 8$  Ом. Ответ: 2 А.

## 4. РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

---

---

### 4.1. Законы Кирхгофа

Для расчета электрических цепей наряду с законом Ома применяются два закона Кирхгофа.

*Первый закон Кирхгофа* применяется к узлу электрической цепи и формулируется следующим образом: *алгебраическая сумма токов в узле электрической цепи равна нулю*:

$$\Sigma I = 0. \quad (4.1)$$

Суммирование распространяется на токи  $I$  в ветвях, сходящихся в рассматриваемом узле. В уравнении (4.1) одинаковые знаки должны быть взяты для токов, имеющих одинаковые положительные направления относительно узловой точки. В уравнениях, составленных по первому закону Кирхгофа, принято записывать токи, направленные к узлу (подтекающие токи), с положительными знаками, а направленные от узла (утекающие токи) – с отрицательными. Например, для узла  $a$  схемы (см. рис. 3.8, б) такое уравнение имеет следующий вид:

$$I - I_1 - I_2 = 0.$$

Если перенести токи  $I_1$  и  $I_2$ , направленные от узла, в правую часть уравнения, то получим

$$I = I_1 + I_2. \quad (4.2)$$

С учетом уравнения (4.2) первый закон Кирхгофа можно сформулировать иначе: *сумма токов, подтекающих к узлу, равна сумме токов, утекающих от узла*:

$$\Sigma I_{\text{п}} = \Sigma I_{\text{у}}.$$

*Физический смысл* первого закона Кирхгофа состоит в том, что в узле электрический заряд не накапливается и не расходуется, сумма электрических зарядов, приходящих к узлу, равна сумме зарядов, уходящих от узла за один и тот же промежуток времени.

---

*Второй закон Кирхгофа* применяется к контурам электрической цепи и формулируется следующим образом: *в любом контуре алгебраическая сумма напряжений на всех элементах и участках электрической цепи, входящих в этот контур, равна нулю:*

$$\Sigma U = 0.$$

Например, обойдем левый контур в схеме (см. рис. 3.8, б) по часовой стрелке и запишем напряжения, направленные по обходу контура со знаком «+», а направленные против обхода – со знаком «-»:

$$U_{\text{Л}} + U_{\text{П}} - U_{\text{И}} = 0. \quad (4.3)$$

Учтем, что по закону Ома напряжение на сопротивлении линии

$$U_{\text{Л}} = IR_{\text{Л}}, \quad (4.4)$$

напряжение на приемнике

$$U_{\text{П}} = I_1 R_1, \quad (4.5)$$

а напряжение на источнике в соответствии с формулой (3.9)

$$U_{\text{И}} = E - IR_{\text{вт}}. \quad (4.6)$$

Подставим значения напряжений (4.4)–(4.6) в уравнение (4.3):

$$IR_{\text{Л}} + I_1 R_1 - E + IR_{\text{вт}} = 0. \quad (4.7)$$

Перепишем выражение (4.7) в следующем виде:

$$IR_{\text{Л}} + I_1 R_1 + IR_{\text{вт}} = E. \quad (4.8)$$

Уравнение (4.8) позволяет дать другую формулировку *второго закона Кирхгофа*: *в контуре электрической цепи алгебраическая сумма падений напряжения в пассивных элементах равна алгебраической сумме ЭДС этого контура:*

$$\Sigma IR = \Sigma E.$$

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа должны быть выбраны или заданы положительные направления токов  $I$  и ЭДС  $E$  источников энергии во всех ветвях и направление обхода контура. Необходимо соблюдать следующее правило знаков для падений напряжения и ЭДС, входящих в уравнение: ЭДС и напряжения, направления которых совпадают с направлением обхода контура, считаются положительными. Направление напряжения на резисторе совпадает с направлением тока в резисторе.

В качестве примера составим уравнение по второму закону Кирхгофа для правого контура схемы (см. рис. 3.8, б), обходя его по часовой стрелке:

$$I_2 R_2 - I_1 R_1 = 0. \quad (4.9)$$

В этом контуре отсутствует ЭДС, поэтому в правой части уравнения (4.9) стоит 0. При обходе контура по часовой стрелке напряжение  $I_2 R_2$  совпало с обходом контура, а напряжение  $I_1 R_1$  противоположно обходу контура.

Режим электрической цепи произвольной конфигурации полностью определяется законами Кирхгофа, поэтому они должны быть основательно усвоены для отчетливого понимания всех последующих разделов учебной дисциплины.

Для лучшего усвоения правил составления уравнений по законам Кирхгофа рассмотрим схему сложной электрической цепи (рис. 4.1). В этой цепи несколько ЭДС, находящихся в разных ветвях, поэтому направления токов в ветвях указаны произвольно.

Направление обхода контуров показано по часовой стрелке. В схеме цепи всего два узла и три ветви. В каждой ветви идет свой ток.

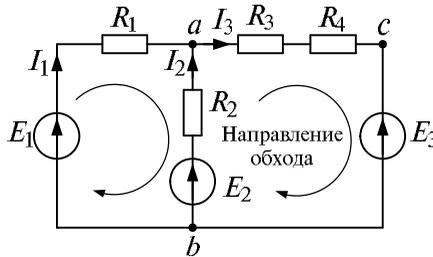


Рис. 4.1. Схема сложной электрической цепи для иллюстрации законов Кирхгофа

Уравнение по первому закону Кирхгофа для узла  $a$ :

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0;$$

для узла  $b$ :

$$I_3 - I_1 - I_2 = 0.$$

Уравнение по второму закону Кирхгофа для левого контура, образованного двумя ветвями с элементами  $E_1, R_1$  и  $E_2, R_2$ :

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = E_1 - E_2.$$

Уравнение для правого контура, образованного двумя ветвями с элементами  $E_2$ ,  $R_2$  и  $E_3$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ :

$$I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_3 R_4 = E_2 - E_3.$$

Следует отметить, что уравнение по второму закону Кирхгофа можно записать и для контура, который проходит от одного узла к другому или от одной точки цепи к другой по окружающему участку электрической цепи пространству. Например, если необходимо определить напряжение между узлами  $a$  и  $b$  (см. рис. 4.1), составим уравнение по контуру, образованному ветвью  $E_1$ ,  $R_1$  и пространством между точками  $a$  и  $b$ , представив его напряжением  $U_{ab}$ , т. е.

$$I_1 R_1 + U_{ab} = E_1,$$

откуда

$$U_{ab} = E_1 - I_1 R_1.$$

Таким образом можно определить напряжение между любыми точками электрической цепи.

Допустим, необходимо определить напряжение между точками  $b$  и  $c$  (см. рис. 4.1). Уравнение по второму закону Кирхгофа имеет вид

$$I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_3 R_4 - U_{bc} = E_2.$$

Следовательно,

$$U_{bc} = I_2 R_2 + I_3 (R_3 + R_4) - E_2.$$

С другой стороны,

$$U_{bc} = -E_3.$$

**Пример 4.1.** Для электрической цепи (рис. 4.2) известны:  $E_1 = 60$  В;  $E_2 = 10$  В;  $R_1 = R_2 = 20$  Ом;  $R_3 = 10$  Ом. Определить напряжение  $U_{ac}$ , используя второй закон Кирхгофа.

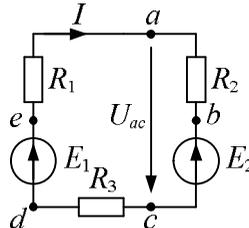


Рис. 4.2

**Решение.** Приняв положительное направление тока в цепи и обход контура по часовой стрелке (рис. 4.2), составим уравнение по второму закону Кирхгофа для внешнего контура  $abcdea$ :

$$I(R_1 + R_2 + R_3) = E_1 - E_2,$$

откуда ток в цепи

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{60 - 10}{20 + 20 + 10} = 1 \text{ A}.$$

Напряжение  $U_{ac}$  определим из уравнения, составленного по второму закону Кирхгофа для контура  $acdea$ :

$$U_{ac} + I(R_1 + R_3) = E_1,$$

откуда

$$U_{ac} = E_1 - I(R_1 + R_3) = 60 - 1(20 + 10) = 30 \text{ V}.$$

## 4.2. Неразветвленная электрическая цепь

Элементы неразветвленной электрической цепи соединены между собой последовательно. Отличительная особенность последовательного соединения: электрический ток во всех участках цепи один и тот же. В схеме электрической цепи между последовательно соединенными элементами нет узлов, т. е. ответвлений тока.

Рассмотрим случай последовательного соединения источников и приемников электрической энергии (рис. 4.3), пренебрегая внутренними сопротивлениями источников.

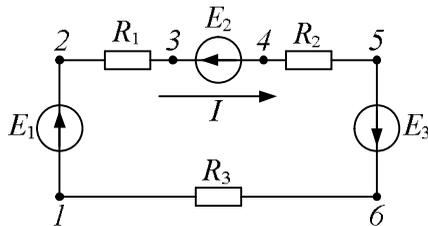


Рис. 4.3. Неразветвленная электрическая цепь

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа, произвольно задавшись направлением тока в цепи и направлением обхода контура (например, по часовой стрелке):

---

---

$$IR_1 + IR_2 + IR_3 = E_1 - E_2 + E_3. \quad (4.10)$$

Ток в электрической цепи

$$I = \frac{E_1 - E_2 + E_3}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (4.11)$$

При обходе контура видно, что относительно направления обхода ЭДС  $E_1$  и  $E_3$  направлены одинаково, т. е. согласно, а ЭДС  $E_2$  – им навстречу.

Ток в цепи определяется действием всех трех ЭДС, и при заданных направлениях ЭДС и выбранном положительном направлении тока  $I$  можно считать, что элементы с ЭДС  $E_1$  и  $E_3$  вырабатывают электрическую энергию, так как направления этих ЭДС совпадают с направлением тока, а элемент с ЭДС  $E_2$  энергию потребляет. Если в качестве источников ЭДС предположить аккумуляторы, то источники  $E_1$  и  $E_3$  разряжаются, а источник  $E_2$  заряжается.

Поскольку направление тока выбрано произвольно, то в результате расчета ток может получиться отрицательным. Это означает, что его направление противоположно указанному на схеме. Это отражается на решении вопроса, какие источники ЭДС являются источниками энергии, а какие приемниками.

Уравнение (4.11) позволяет три ЭДС неразветвленной электрической цепи заменить одной эквивалентной:

$$E_3 = E_1 - E_2 + E_3,$$

т. е. эквивалентная ЭДС равна алгебраической сумме ЭДС неразветвленной электрической цепи.

Кроме того, уравнение (4.11), записанное в соответствии со вторым законом Кирхгофа, позволяет определить эквивалентное сопротивление трех последовательно включенных резисторов:

$$R_3 = R_1 + R_2 + R_3. \quad (4.12)$$

Вывод (4.12) можно распространить на любое число последовательно включенных резистивных элементов:

$$R_3 = \sum_1^n R_n,$$

т. е. эквивалентное сопротивление последовательно включенных резисторов равно сумме сопротивлений этих резисторов.

Определение эквивалентной ЭДС и эквивалентного сопротивления позволяет получить более простую схему электрической цепи (рис. 4.4).

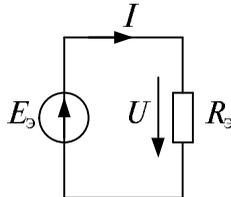


Рис. 4.4. Эквивалентная схема неразветвленной электрической цепи

Схемы цепей на рисунках 4.3 и 4.4 эквивалентны, поскольку ток  $I$  в них одинаковый:

$$I = \frac{E_3}{R_3} = \frac{E_1 - E_2 + E_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Расчет тока в неразветвленной электрической цепи, содержащей различное количество последовательно соединенных элементов, наиболее удобен с помощью уравнения, составленного по второму закону Кирхгофа, аналогичного уравнению (4.10).

### 4.3. Потенциальная диаграмма неразветвленной цепи

Как отмечалось в главе 3, за положительное направление электрического тока принято направление движения положительных зарядов, поэтому ток  $I$  через резистор  $R$  идет от большего потенциала к меньшему. На резисторе потенциал снижается в направлении тока на величину падения напряжения  $IR$ .

Направление действия ЭДС (от отрицательного вывода к положительному) указывается на схемах электрических цепей стрелкой, что говорит о направлении возрастания потенциала. На источнике ЭДС потенциал возрастает в направлении ЭДС на величину ЭДС  $E$ .

В схеме, представленной на рисунке 4.3, при переходе от точки 1 к точке 2 потенциал повышается на величину  $E_1$ , а при переходе от точки 2 к точке 3 снижается на величину  $U_{23} = IR_1$ . При переходе от точки 3 к точке 4 потенциал понижается на величину  $E_2$ .

Изменение потенциалов в электрической цепи можно изобразить графически в виде потенциальной диаграммы.

Потенциальная диаграмма представляет собой график изменения потенциала при обходе цепи, построенный в прямоугольной системе координат, в которой по оси абсцисс откладываются в определенном масштабе сопротивления участков цепи, а по оси ординат – потенциалы соответствующих точек.

Для расчета значений потенциалов точек необходимо принять потенциал одной из точек схемы равным нулю. Эту точку помещают в начало координат. Для схемы на рисунке 4.3 примем потенциал точки 1 равным нулю:  $\varphi_1 = 0$ . Потенциалы других точек найдем согласно равенствам:  $\varphi_2 = \varphi_1 + E_1$ ;  $\varphi_3 = \varphi_2 - IR_1$ ;  $\varphi_4 = \varphi_3 - E_2$ ;  $\varphi_5 = \varphi_4 - IR_2$ ;  $\varphi_6 = \varphi_5 + E_3$ ;  $\varphi_1 = \varphi_6 - IR_3$ .

Сумма изменений потенциалов по контуру должна быть равна нулю, так как она выражает работу, затраченную на перемещение единичного заряда по замкнутому пути в электрических полях источников и приемников энергии.

Таким образом, для рассматриваемого контура

$$E_1 - IR_1 - E_2 - IR_2 + E_3 - IR_3 = 0,$$

или

$$E_1 - E_2 + E_3 = IR_1 + IR_2 + IR_3,$$

что соответствует уравнению второго закона Кирхгофа (4.10).

Потенциальная диаграмма цепи, изображенной на рисунке 4.3, показана на рисунке 4.5.

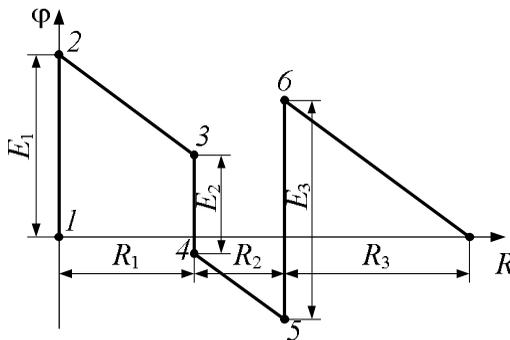


Рис. 4.5. Потенциальная диаграмма цепи

Поскольку внутренние сопротивления источников ЭДС приняты равными нулю, при переходе через эти элементы потенциалы изменяются скачком.

Потенциальная диаграмма дает наглядное представление, между какими точками электрической цепи наибольшее напряжение. В нашем случае наибольшее напряжение находится между точками 2 и 5. Между точками цепи с наибольшей разностью потенциалов должна быть усиленная изоляция.

#### 4.4. Параллельное соединение резистивных элементов

Параллельно соединенные резисторы присоединены к одной паре узлов и находятся под одним и тем же напряжением.

Приемники электрической энергии, представленные на схеме рисунка 4.6, *a* сопротивлениями  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , и источник электрической энергии  $E$  с внутренним сопротивлением  $R_{вт}$  подключены к одной паре узлов (точки А и Б).

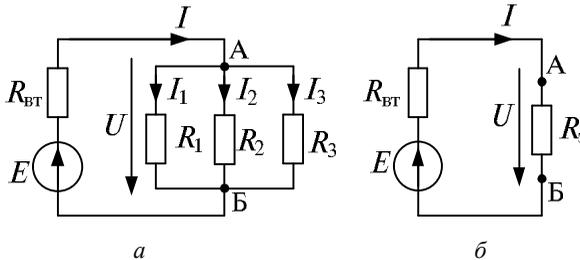


Рис. 4.6. Схемы электрических цепей:

- a* – с параллельным соединением резисторов  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ;  
*б* – эквивалентная неразветвленная электрическая цепь

Параллельно в схеме (рис. 4.6, *a*) соединены только резисторы  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ . Для вывода формулы расчета эквивалентного сопротивления  $R_э$  параллельно соединенных резисторов запишем уравнение токов для узла А, используя первый закон Кирхгофа:

$$I = I_1 + I_2 + I_3. \quad (4.13)$$

Токи в приемниках запишем в соответствии с законом Ома:

---

---

$$I_1 = \frac{U}{R_1}; \quad I_2 = \frac{U}{R_2}; \quad I_3 = \frac{U}{R_3},$$

где  $\frac{1}{R_1} = g_1$ ;  $\frac{1}{R_2} = g_2$ ;  $\frac{1}{R_3} = g_3$  – проводимости резисторов  $R_1, R_2, R_3$ .

Уравнение (4.13) принимает следующий вид:

$$I = Ug_1 + Ug_2 + Ug_3 = U(g_1 + g_2 + g_3). \quad (4.14)$$

Разделив уравнение (4.14) на  $U$ , получим

$$\frac{I}{U} = g_1 + g_2 + g_3.$$

Отношение  $\frac{I}{U}$  есть эквивалентная проводимость  $g_3$ , соответствующая общему току цепи и общему напряжению:

$$g_3 = g_1 + g_2 + g_3. \quad (4.15)$$

Этот вывод можно распространить на любое число  $n$  параллельно соединенных приемников:

$$g_3 = \sum_1^n g_n. \quad (4.16)$$

При параллельном соединении резистивных элементов эквивалентная (общая) проводимость между двумя узлами равна сумме проводимостей всех резистивных элементов.

Эквивалентное сопротивление при параллельном соединении резисторов определяется из равенства

$$R_3 = \frac{1}{g_3}. \quad (4.17)$$

Очень часто встречается параллельное соединение двух резисторов. В таком случае эквивалентная проводимость определяется по формуле

$$g_3 = g_1 + g_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2},$$

а эквивалентное сопротивление

$$R_3 = \frac{1}{g_3} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (4.18)$$

Уравнение (4.18) для двух параллельно соединенных резисторов легко запоминается, но для большего числа параллельно соединенных резисторов выражения для  $R_3$  получаются более сложными, и в этом случае рекомендуется пользоваться уравнениями (4.16) и (4.17).

В частном случае, когда сопротивления  $n$  резисторов, соединенных параллельно, одинаковые, т. е.  $R_n = R$ , получим

$$R_3 = \frac{R}{n}.$$

Для схемы, представленной на рисунке 4.6, а, используя уравнения (4.15) и (4.17), получаем

$$R_y = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}.$$

Схема на рисунке 4.6, б, полученная после замены трех сопротивлений приемников одним эквивалентным, представляет собой простейшую электрическую цепь. Ток в этой схеме, равный току в неразветвленной части (рис. 4.6, а), определяется по формуле (3.8):

$$I = \frac{E}{R_{вт} + R_3}.$$

Целью расчета электрической цепи является не только определение общего тока, но и тока в каждой ветви.

Если заданы ЭДС и все сопротивления, то после расчета общего тока  $I$  нужно определить напряжение  $U$  между узловыми точками и токи в ветвях по закону Ома:

$$U = IR_3; \quad I_1 = \frac{U}{R_1}; \quad I_2 = \frac{U}{R_2}; \quad I_3 = \frac{U}{R_3}.$$

#### 4.5. Расчет электрических цепей методом эквивалентных сопротивлений (метод свертывания цепи)

Метод эквивалентных сопротивлений применяется для расчета таких электрических цепей, в которых имеются пассивные элемен-

ты (резисторы), включенные между собой последовательно, параллельно или по смешанной схеме.

На рисунке 4.7, *a* представлена схема электрической цепи со смешанным соединением резисторов. Между зажимами «+» и «-» находится источник энергии, создающий напряжение  $U$ .

При рассмотрении электрических цепей с одним источником энергии источник ЭДС  $E$  не изображают, так как в практической электротехнике обычно известны не ЭДС источников и их внутреннее сопротивление, а напряжение  $U$ , которое они создают в рабочем режиме.

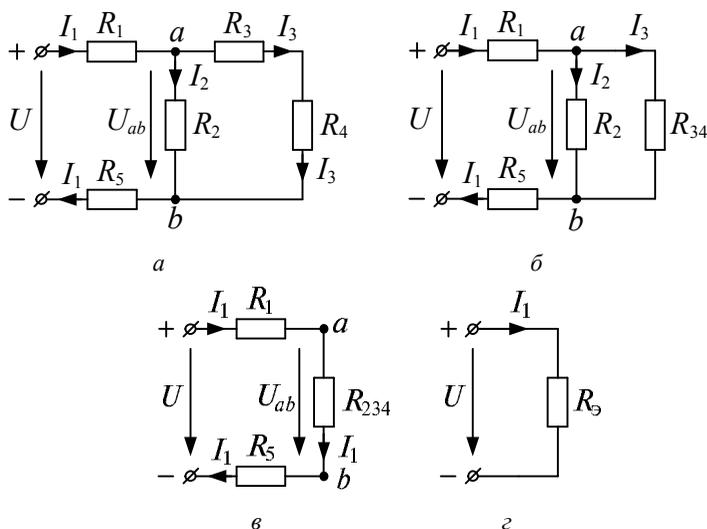


Рис. 4.7. Электрическая цепь со смешанным соединением приемников:  
*a* – исходная схема электрической цепи; *б* – схема цепи после преобразования;  
*в*, *г* – схемы эквивалентных неразветвленных электрических цепей

Рассматриваемая схема электрической цепи имеет два узла и три ветви. В каждой ветви идет свой ток, направления токов показаны от зажима «+» к зажиму «-» источника энергии. Обычно задача состоит в определении величин токов при заданных напряжении источника питания  $U$  и сопротивлениях приемников. Посколь-

ку напряжение задано на входе цепи, т. е. общее, то в соответствии с законом Ома для расчета тока нужно иметь общее сопротивление всех приемников. Для нахождения общего, эквивалентного сопротивления приемников нужно использовать правила нахождения эквивалентных сопротивлений при последовательном и параллельном включении приемников.

Резисторы, включенные в одну ветвь, соединены последовательно, так как через них идет один и тот же ток, т. е. в схеме цепи (см. рис. 4.7, *а*) резисторы  $R_1$  и  $R_5$ , а также  $R_3$  и  $R_4$  соединены последовательно. Существует негласное правило, по которому свертывание схемы электрической цепи нужно начинать с участков электрической цепи, наиболее удаленных от источника энергии, поэтому  $R_3 + R_4 = R_{34}$ .

После такой замены получается более простая схема (см. рис. 4.7, *б*). В этой схеме хорошо видно, что  $R_2$  и  $R_{34}$  присоединены к одной паре узлов и, следовательно, эти резисторы соединены параллельно, их можно заменить одним (эквивалентным), определив его сопротивление по формуле, аналогичной (4.18):

$$R_{234} = \frac{R_2 R_{34}}{R_2 + R_{34}}.$$

Получаем более простую схему (рис. 4.7, *в*). В этой схеме резисторы  $R_1$  и  $R_{234}$ ,  $R_5$  соединены последовательно, т. е. эквивалентное (общее) сопротивление электрической цепи

$$R_3 = R_1 + R_{234} + R_5.$$

Подобные преобразования используют и в схемах с несколькими источниками энергии в разных ветвях, таким образом достигается упрощение, которое значительно облегчает расчет.

В простейшей цепи (рис. 4.7, *з*) ток  $I_1$  определяют по закону Ома с использованием формулы (3.3):

$$I_1 = \frac{U}{R_3}.$$

Токи в других ветвях первоначальной схемы определяют, переходя от схемы к схеме в обратном порядке.

---

---

При эквивалентном преобразовании части схемы электрической цепи токи и напряжения остальных участков цепи не изменяются, поэтому по схеме рисунка 4.7, в видно, что по закону Ома

$$U_{ab} = I_1 R_{234}. \quad (4.19)$$

Зная напряжение (4.19), находим по закону Ома токи (см. рис. 4.7, б):

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2}; \quad I_3 = \frac{U_{ab}}{R_{34}}.$$

Для проверки расчета следует составить баланс мощностей:

$$UI_1 = I_1^2(R_1 + R_5) + I_2^2 R_2 + I_3^2(R_3 + R_4).$$

Напряжение  $U_{ab}$  после определения тока  $I_1$  можно найти по второму закону Кирхгофа, используя левый контур первоначальной схемы электрической цепи (см. рис. 4.7, а) и обход контура по часовой стрелке:

$$I_1 R_1 + U_{ab} + I_1 R_5 - U = 0,$$

откуда

$$U_{ab} = U - I_1 R_1 - I_1 R_5.$$

Следует отметить, что определение эквивалентного сопротивления требует определенных навыков и знаний, что значит параллельное соединение и что – последовательное. Кроме этих соединений, есть еще соединения трех резисторов звездой или треугольником, а также соединения, которые никак не называются и никак не преобразуются. Например, в схеме рисунка 4.7, а резисторы  $R_1$  и  $R_2$  соединены, но ни последовательно, так как между ними есть узел, ни параллельно, так как резистор  $R_2$  присоединен к узлам  $a$  и  $b$ , а резистор  $R_1$  – к узлу  $a$  и к зажиму «+» источника. То же происходит с резисторами  $R_2$  и  $R_4$ , они не соединены параллельно, так как резистор  $R_4$  присоединен к узлу  $b$  и к резистору  $R_3$ , а не к узлу  $a$ .

#### **4.6. Преобразование соединения треугольником в эквивалентное соединение звездой и обратно**

Во многих схемах электрических цепей можно выделить группы из трех резисторов, образующих треугольник или звезду сопротивлений.

В схеме электрической цепи (рис. 4.8, *a*) нет резисторов, соединенных последовательно или параллельно, но к узлам 1, 2, 3 присоединен треугольник резисторов  $R_{12}$ ,  $R_{23}$ ,  $R_{31}$ , а к узлам 2, 4, 3 – треугольник  $R_{24}$ ,  $R_{43}$ ,  $R_{23}$ .

Замена одного из треугольников звездой, как показано на рисунке 4.8, *б*, позволяет получить схему со смешанным соединением приемников. Резисторы  $R_2$  и  $R_{24}$ , а также  $R_3$  и  $R_{23}$  соединены последовательно и их можно заменить эквивалентными, которые в свою очередь соединены параллельно. В итоге схема преобразуется в простейшую (рис. 4.8, *в*).

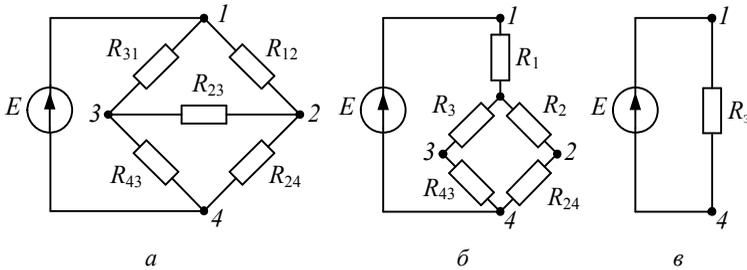


Рис. 4.8. Упрощение схемы преобразованием соединения треугольником в соединение звездой

Рассмотрим фрагмент схемы (рис. 4.9, *a*), в которой между узлами 1, 2, 3 включены три сопротивления  $R_{23}$ ,  $R_{31}$ ,  $R_{12}$ , соединенные треугольником, а на рисунке 4.9, *б* между этими же узлами включены три сопротивления  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , соединенные звездой, и выведем уравнения преобразования этих схем.

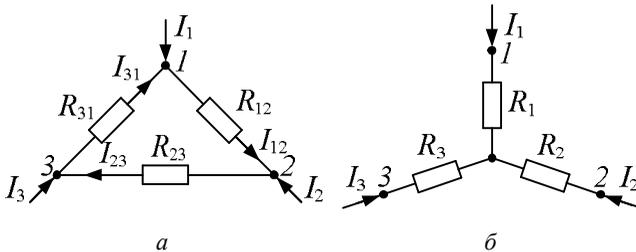


Рис. 4.9. Схемы соединения приемников:  
*a* – треугольником; *б* – звездой

Соединения треугольником и звездой, изображенные на рисунке 4.9, эквивалентны друг другу при условии, что внешние напряжения  $U_{12}$ ,  $U_{23}$ ,  $U_{31}$  (между точками 1, 2, 3) и токи  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ , подходящие к этим точкам, одинаковы в обоих случаях.

По второму закону Кирхгофа сумма напряжений в контуре треугольника равна нулю:

$$I_{12}R_{12} + I_{23}R_{23} + I_{31}R_{31} = 0. \quad (4.20)$$

По первому закону Кирхгофа для узлов 2 и 1 выразим токи:

$$I_{23} = I_{12} + I_2; \quad I_{31} = I_{12} - I_1$$

и, подставив в выражение (4.20), определим ток

$$I_{12} = \frac{I_1R_{31} - I_2R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Напряжение между узлами 1 и 2 треугольника (рис. 4.9, а)

$$U_{12} = I_{12}R_{12} = \frac{I_1R_{12}R_{31} - I_2R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Такое же напряжение в схеме, приведенной на рисунке 4.9, б:

$$U_{12} = I_1R_1 - I_2R_2.$$

Для выполнения условия эквивалентности необходимо равенство напряжений  $U_{12}$  в обеих схемах при любых токах  $I_1$  и  $I_2$ , т. е.

$$I_1 \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} - I_2 \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = I_1R_1 - I_2R_2. \quad (4.21)$$

Равенство (4.21) должно выполняться, если равны коэффициенты при токах  $I_1$  и  $I_2$ . Значит, получаем уравнения для определения сопротивлений искомой эквивалентной звезды через заданные сопротивления треугольника:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad (4.22)$$

$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad (4.23)$$

$$R_3 = \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (4.24)$$

Выражение (4.24) получается по аналогии с предыдущими в результате круговой замены индексов.

Таким образом, *сопротивление луча звезды равно произведению сопротивлений прилегающих сторон треугольника, деленному на сумму сопротивлений трех сторон треугольника.*

На рисунке 4.10 приведен пример, когда замена части схемы с соединением приемников звездой позволяет преобразовать сложную электрическую схему в схему со смешанным соединением приемников.

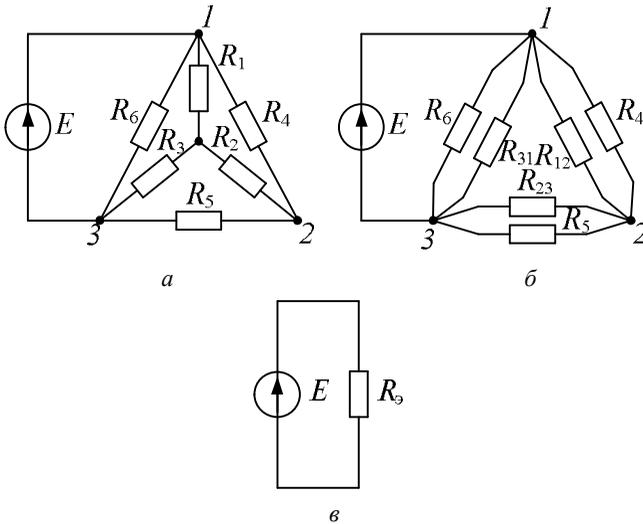


Рис. 4.10. Упрощение схемы преобразованием соединения звездой в соединение треугольником

После преобразования трех сопротивлений исходной схемы  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , соединенных звездой (рис. 4.10, а) в эквивалентный треугольник, получается схема (рис. 4.10, б), которую можно упростить. Парно сопротивления  $R_{12}$  и  $R_4$ ,  $R_{23}$  и  $R_5$ ,  $R_{31}$  и  $R_6$  соединены параллельно. После их замены эквивалентными сопротивлениями

---

получается схема с последовательным соединением ( $R_{124}$  и  $R_{235}$ ) и параллельно присоединенным к ней сопротивлением  $R_{316}$ . В итоге схема приводится к простейшей (рис. 4.10, в).

Выражения для искоемых сопротивлений треугольника  $R_{12}$ ,  $R_{23}$ ,  $R_{31}$  через заданные сопротивления звезды  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  можно найти в результате совместного решения уравнений (4.22)–(4.24):

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3};$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1};$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}.$$

*Следовательно, при эквивалентном преобразовании соединения звездой в соединение треугольником сопротивление стороны треугольника равно сумме сопротивлений прилегающих лучей звезды и их произведения, деленного на сопротивление третьего луча.*

#### **4.7. Метод уравнений Кирхгофа**

Метод уравнений Кирхгофа является универсальным, т. е. пригодным для задач анализа любой электрической цепи. Положим, в схеме, содержащей  $B$  ветвей и  $Y$  узлов, заданными являются источники ЭДС и сопротивления приемников, а искомыми – токи в ветвях. Следовательно, число неизвестных равно числу ветвей, и для нахождения токов необходимо иметь систему уравнений, составленных по первому и второму законам Кирхгофа.

По первому закону Кирхгофа, выражающему равенство нулю алгебраической суммы токов в узле, можно записать  $Y - 1$  независимых уравнений.

По второму закону Кирхгофа, выражающему равенство алгебраической суммы ЭДС в контуре алгебраической сумме падений напряжений в нем, нужно записать  $B - Y + 1$  независимых уравнений.

Система, состоящая из взаимно независимых  $Y - 1$  уравнений по первому закону Кирхгофа и  $B - Y + 1$  уравнений по второму за-

кону Кирхгофа, в сумме дает необходимое и достаточное число уравнений для определения токов во всех ветвях.

При записи уравнений по второму закону Кирхгофа следует обращать внимание на то, чтобы составленные уравнения были взаимно независимыми. Контур выбирается так, чтобы в них вошли все ветви схемы, а в каждом из контуров – возможно меньшее число ветвей. Контур взаимно независим, если каждый последующий контур, для которого составляется уравнение, имеет не меньше одной новой ветви.

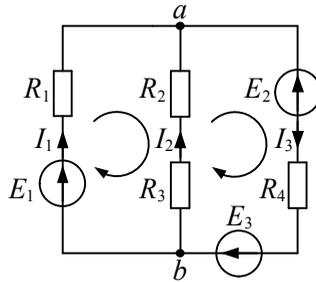
При составлении уравнений рекомендуется придерживаться следующей последовательности: сначала выбрать произвольные положительные направления токов во всех ветвях электрической цепи, затем составить уравнения для узлов на основании первого закона Кирхгофа и уравнения для контуров на основании второго закона Кирхгофа. При этом ток источника тока учитывается только при записи уравнений по первому закону Кирхгофа.

В качестве примера запишем систему уравнений по законам Кирхгофа для цепи, схема которой представлена на рисунке 4.1. Схема цепи содержит два узла, поэтому по первому закону Кирхгофа необходимо составить одно уравнение. В схеме рисунка 4.1 три ветви, следовательно, число неизвестных токов и число необходимых уравнений равно трем. Недостающие два уравнения необходимо составить по второму закону Кирхгофа. В итоге система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0; \\ I_1 R_1 - I_2 R_2 = E_1 - E_2; \\ I_2 R_2 + I_3 (R_3 + R_4) = E_2 - E_3. \end{cases}$$

Подставив в систему уравнений заданные величины ЭДС и сопротивлений и решив ее известными в алгебре методами, получим значения токов в ветвях  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ . Результаты расчетов проверяем по балансу мощностей.

**Пример 4.2.** Дано:  $E_1 = 100$  В;  $E_2 = 20$  В;  $E_3 = 60$  В;  $R_1 = 10$  Ом;  $R_2 = 20$  Ом;  $R_3 = 40$  Ом;  $R_4 = 20$  Ом. Определить токи в ветвях электрической цепи постоянного тока (рис. 4.11), используя уравнения Кирхгофа.



Ри. 4.11

**Решение.** Цепь содержит три ветви с неизвестными токами и два узла. Для определения токов составим одно уравнение по первому закону Кирхгофа и два уравнения – по второму закону Кирхгофа. Задаем положительные направления токов в ветвях и направление обхода контуров, обозначаем их на схеме цепи.

Составляем уравнение по первому закону Кирхгофа для узла  $a$ :

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0.$$

Составляем уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 - R_3 I_2 = E_1;$$

$$(R_2 + R_3) I_2 + R_4 I_3 = E_3 - E_2.$$

Подставляем числовые значения и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0; \\ 10I_1 - 60I_2 = 100; \\ 60I_2 + 20I_3 = 40. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения системы

$$I_1 = \frac{100 + 60I_2}{10} = 10 + 6 \cdot I_2.$$

Выразим из третьего уравнения системы

$$I_3 = \frac{40 - 60I_2}{20} = 2 - 3 \cdot I_2.$$

Подставим выражения токов  $I_1$  и  $I_3$  в первое уравнение системы:

$$10 + 6I_2 + I_2 - 2 + 3I_2 = 0;$$

$$10I_2 = -8; I_2 = -0,8 \text{ A.}$$

Находим:  $I_1 = 10 - 6 \cdot 0,8 = 5,2 \text{ A}$ ;  $I_3 = 2 + 3 \cdot 0,8 = 4,4 \text{ A}$ .

Проверим по балансу мощностей:

мощность источников ЭДС

$$P_{\text{и}} = E_1 I_1 + E_3 I_3 - E_2 I_3 =$$

$$= 100 \cdot 5,2 + 60 \cdot 4,4 - 20 \cdot 4,4 = 520 + 264 - 88 = 696 \text{ Вт};$$

мощность потребителей

$$P_{\text{потр}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 (R_2 + R_3) + I_3^2 R_4;$$

$$P_{\text{потр}} = 5,2^2 \cdot 10 + 0,8^2 \cdot 60 + 4,4^2 \cdot 20 = 270,4 + 38,4 + 387,4 = 696 \text{ Вт.}$$

$$P_{\text{и}} = P_{\text{потр.}}$$

Расчет токов выполнен правильно.

#### 4.8. Метод контурных токов

Сущность метода состоит в том, что за неизвестные принимают условные токи, которые как бы циркулируют в контурах схемы.

Число неизвестных в этом методе равно числу уравнений, которые необходимо было бы составить по второму закону Кирхгофа, т. е. число неизвестных равно числу независимых контуров. Значит, метод контурных токов более экономичен (меньше уравнений по сравнению с методом уравнений Кирхгофа).

Для вывода основных уравнений метода рассмотрим схему цепи (рис. 4.12).

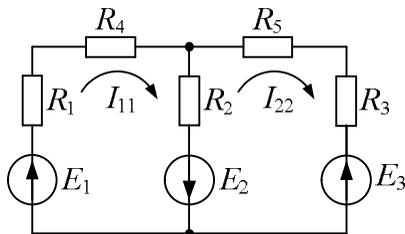


Рис. 4.12. Схема цепи для иллюстрации метода контурных токов

В данной схеме два независимых контура. Полагаем, что в каждом независимом контуре течет свой контурный ток  $I_{11}$  и  $I_{22}$ . Задав их направления и направление обхода контуров (обычно по часовой стрелке), составим по второму закону Кирхгофа уравнения для независимых контуров, учитывая, что по смежной ветви (с сопротивлением  $R_2$ ) течет сверху вниз ток  $I_{11}$ , а снизу вверх ток  $I_{22}$ . Поэтому фактически через  $R_2$  течет ток  $I_{11} - I_{22}$ :

$$\begin{cases} I_{11}(R_1 + R_4) + (I_{11} - I_{22})R_2 = E_1 + E_2; \\ -(I_{11} - I_{22})R_2 + I_{22}(R_3 + R_5) = -E_2 - E_3. \end{cases} \quad (4.25)$$

Преобразуем систему уравнений (4.25), сгруппировав контурные токи:

$$\begin{cases} I_{11}(R_1 + R_2 + R_4) + I_{22}(-R_2) = E_1 + E_2; \\ I_{11}(-R_2) + I_{22}(R_2 + R_3 + R_5) = -E_2 - E_3. \end{cases} \quad (4.26)$$

Если обозначим:

$R_1 + R_2 + R_4 = R_{11}$  – собственное сопротивление контура, по которому протекает контурный ток  $I_{11}$ ;

$R_2 + R_3 + R_5 = R_{22}$  – собственное сопротивление контура, по которому протекает контурный ток  $I_{22}$ ;

$-R_2 = R_{12} = R_{21}$  – общее сопротивление контуров, т. е. сопротивление смежной ветви, взятое с отрицательным знаком;

$E_1 + E_2 = E_{11}$  – контурная ЭДС первого контура;

$-E_2 - E_3 = E_{22}$  – контурная ЭДС второго контура,

то система уравнений (4.26) будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} = E_{11}; \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} = E_{22}. \end{cases} \quad (4.27)$$

Приведенная компактная запись системы уравнений (4.27) позволяет выработать алгоритм составления системы уравнений для более сложных схем электрических цепей.

Расчет электрических цепей методом контурных токов ведут в такой последовательности. Полагают, что в каждом независимом контуре протекает свой контурный ток. Задают их положительные направления, которые обозначают на схеме. Выбирают направле-

ния обхода контуров и по второму закону Кирхгофа составляют уравнения для независимых контуров. Решив полученную систему уравнений, находят контурные токи. Затем задают положительные направления действительных токов в ветвях и обозначают их на схеме. Значения токов в ветвях определяют алгебраической суммой соответствующих контурных токов, проходящих по данной ветви.

Если представить, что токи всех ветвей направлены к верхнему узлу (рис. 4.12), то уравнения для их определения будут следующими:

$$I_1 = I_{11}; \quad I_2 = I_{22} - I_{11}; \quad I_3 = -I_{22}.$$

**Пример 4.3.** Для цепи (рис. 4.13) известны  $E_1 = 8$  В,  $E_2 = 6$  В,  $R_1 = R_3 = 2$  Ом,  $R_2 = 4$  Ом. Определить токи в цепи методом контурных токов.

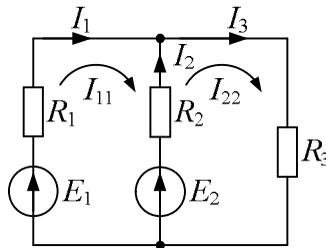


Рис. 4.13

**Решение.** Указываем направления контурных токов  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ . Составляем уравнения по второму закону Кирхгофа, используя систему уравнений (4.27):

$$\begin{cases} I_{11}(R_1 + R_2) - I_{22}R_2 = E_1 - E_2; \\ I_{22}(R_2 + R_3) - I_{11}R_2 = E_2. \end{cases}$$

Подставляем числовые значения величин:

$$\begin{cases} I_{11}6 - I_{22}4 = 2; \\ I_{22}6 - I_{11}4 = 6. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения системы ток  $I_{11}$ :

$$I_{11} = \frac{2 + I_{22}4}{6} = 0,333 + I_{22} \cdot 0,666. \quad (4.28)$$

Подставим выражение тока  $I_{11}$  во второе уравнение системы:

$$I_{22} \cdot 6 - (0,333 + I_{22} \cdot 0,666)4 = 6.$$

Решаем уравнение с одним неизвестным и находим  $I_{22} = 2,2$  А, тогда по уравнению (4.28)  $I_{11} = 1,8$  А.

Токи в ветвях:  $I_1 = I_{11} = 1,8$  А;  $I_2 = I_{22} - I_{11} = 2,2 - 1,8 = 0,4$  А;  $I_3 = I_{22} = 2,2$  А.

Проверим по балансу мощностей:

мощность источников ЭДС

$$P_{\text{и}} = E_1 I_1 + E_2 I_2 = 8 \cdot 1,8 + 6 \cdot 0,4 = 16,8 \text{ Вт};$$

мощность приемников

$$P_{\text{п}} = I_1^2 R + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = 1,8^2 \cdot 2 + 0,4^2 \cdot 4 + 2,2^2 \cdot 2 = 16,8 \text{ Вт}.$$

Баланс мощностей соблюдается:  $P_{\text{и}} = P_{\text{п}}$ .

Расчет токов выполнен правильно.

#### 4.9. Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС. Метод узловых потенциалов

Для участка цепи, представленного на рисунке 4.14, можно выразить напряжение между крайними точками участка через разность потенциалов этих точек:

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = (\varphi_a - \varphi_c) + (\varphi_c - \varphi_b).$$

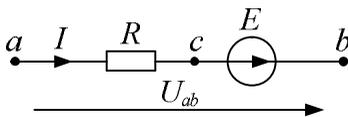


Рис. 4.14. Схема участка цепи, содержащего ЭДС

Согласно закону Ома,  $\varphi_a - \varphi_c = IR$ , а  $\varphi_b - \varphi_c = E$ , или  $\varphi_c - \varphi_b = E$ . Значит,  $U_{ab} = IR - E$ . Тогда ток на участке

$$I = \frac{U_{ab} + E}{R}. \quad (4.29)$$

Аналогично для участка цепи, где положительные направления тока  $I$  и ЭДС  $E$  не совпадают (противоположны), получим

$$I = \frac{U_{ab} - E}{R}. \quad (4.30)$$

На основании уравнений (4.29) и (4.30) выразим в общем виде закон Ома для участка электрической цепи, содержащего ЭДС:

$$I = \frac{U_{ab} \pm E}{R}. \quad (4.31)$$

Аналогично можно написать формулу для тока участка, состоящего из любого числа последовательно соединенных источников и приемников при заданной разности потенциалов на концах этого участка.

Следует иметь в виду, что уравнение (4.31) записано для напряжения  $U_{ab}$ , совпадающего по направлению с током. В противном случае напряжение  $U_{ab}$  нужно брать со знаком «-».

Методом узловых потенциалов для расчета токов в ветвях сложной электрической цепи целесообразно воспользоваться, если в электрической цепи независимых контуров больше количества узлов -1.

Ток в любой ветви схемы можно найти по закону Ома для участка цепи, содержащего ЭДС. Однако для этого необходимо знать потенциалы узлов схемы.

Метод расчета электрических цепей, в котором за неизвестные принимают потенциалы узлов схемы, называют *методом узловых потенциалов*.

Для выяснения сущности этого метода рассмотрим схему (рис. 4.15).

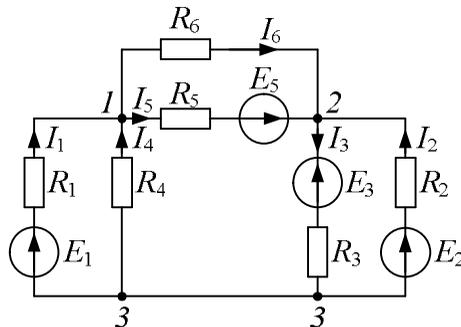


Рис. 4.15. Схема цепи для иллюстрации метода узловых потенциалов

В данной схеме три узла. Так как любая одна точка схемы может быть заземлена без изменения токораспределения в схеме, то потенциал одного этого узла можно принять равным нулю. Допустим  $\varphi_3 = 0$ . Тогда число неизвестных потенциалов узлов сократилось на единицу.

Составим уравнения для первого и второго узлов по первому закону Кирхгофа:

$$I_1 + I_4 - I_5 - I_6 = 0;$$

$$I_5 + I_6 + I_2 - I_3 = 0.$$

Токи в ветвях на основании закона Ома:

$$I_1 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1 + E_1}{R_1} = (-\varphi_1 + E_1)g_1; \quad I_2 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2 + E_2}{R_2} = (-\varphi_2 + E_2)g_2;$$

$$I_3 = (\varphi_2 - E_3)g_3; \quad I_4 = -\varphi_1 g_4; \quad I_5 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_5}{R_5} = (\varphi_1 - \varphi_2 + E_5)g_5;$$

$$I_6 = (\varphi_1 - \varphi_2)g_6.$$

Подставляем значения токов в уравнения, составленные по первому закону Кирхгофа.

*Для узла 1:*

$$(-\varphi_1 + E_1)g_1 - \varphi_1 g_4 - (\varphi_1 - \varphi_2 + E_5)g_5 - (\varphi_1 - \varphi_2)g_6 = 0.$$

*Для узла 2:*

$$(\varphi_1 - \varphi_2 + E_5)g_5 + (\varphi_1 - \varphi_2)g_6 + (-\varphi_1 + E_2)g_2 - (\varphi_2 - E_3)g_3 = 0.$$

После преобразований получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_1(g_1 + g_4 + g_5 + g_6) - \varphi_2(g_5 + g_6) = E_1 g_1 - E_5 g_5; \\ \varphi_2(g_5 + g_6 + g_2 + g_3) - \varphi_1(g_5 + g_6) = E_5 g_5 + E_2 g_2 + E_3 g_3. \end{cases}$$

Введем обозначения:

$g_{11} = g_1 + g_4 + g_5 + g_6$  – сумма проводимостей всех ветвей, сходящихся в узле 1;

$g_{22} = g_5 + g_6 + g_2 + g_3$  – сумма проводимостей всех ветвей, сходящихся в узле 2;

$g_{12} = g_{21} = g_5 + g_6$  – сумма проводимостей ветвей, соединяющих узлы  $1$  и  $2$ .

Если между какими-либо узлами нет ветвей, то соответствующая проводимость равна нулю.

$I_{11}, I_{22}$  – узловые токи узлов  $1$  и  $2$ , равные алгебраической сумме токов, полученных от умножения ЭДС ветвей, подходящих к соответствующему узлу, на проводимости данных ветвей.

ЭДС, направленная к узлу, принимается со знаком «+», от узла – со знаком «-».

С учетом введенных обозначений получим обобщенную систему:

$$\begin{cases} \varphi_1 g_{11} - \varphi_2 g_{12} = I_{11}; \\ \varphi_2 g_{22} - \varphi_1 g_{21} = I_{22}. \end{cases} \quad (4.32)$$

Решив систему, определим потенциалы узлов, а затем по закону Ома – токи в ветвях.

Приведенная компактная запись системы уравнений (4.32) для расчета потенциалов узлов создает алгоритм составления уравнений для схем любой сложности.

**Пример 4.4.** Составить систему уравнений по методу узловых потенциалов для схемы (рис. 4.16).

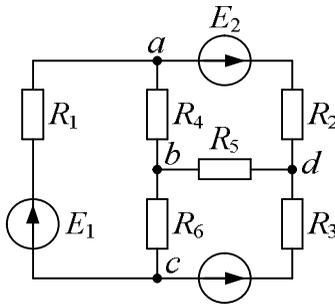


Рис. 4.16

**Решение.** Примем потенциал одного из узлов  $\varphi_d = 0$ . Система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \varphi_a \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) - \varphi_b \frac{1}{R_4} - \varphi_c \frac{1}{R_1} = E_1 \frac{1}{R_1} - E_2 \frac{1}{R_2}; \\ \varphi_b \left( \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) - \varphi_a \frac{1}{R_4} - \varphi_c \frac{1}{R_6} = 0; \\ \varphi_c \left( \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) - \varphi_a \frac{1}{R_1} - \varphi_b \frac{1}{R_6} = -E_1 \frac{1}{R_1} - E_3 \frac{1}{R_3}. \end{cases}$$

#### 4.10. Метод двух узлов

Распространены электрические схемы, содержащие всего два узла (рис. 4.17). В таком случае наиболее рациональным методом расчета токов в них является метод двух узлов. Под *методом двух узлов* понимают метод расчета электрических цепей, в котором за искомое принимают напряжение между двумя узлами схемы, с помощью которого потом определяют токи ветвей.

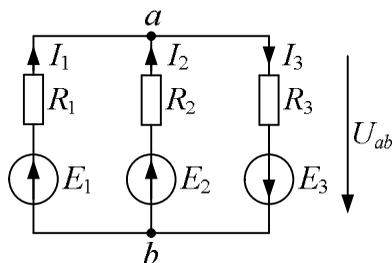


Рис. 4.17. Схема электрической цепи с двумя узлами

Чтобы получить расчетную формулу для применения метода двух узлов, в схеме электрической цепи (см. рис. 4.17) определим напряжение между двумя узлами  $U_{ab}$ . Воспользуемся методом узловых потенциалов. Примем  $\varphi_b = 0$ , тогда уравнение для узла  $a$  будет иметь следующий вид:

$$\varphi_a \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = E_1 \frac{1}{R_1} + E_2 \frac{1}{R_2} - E_3 \frac{1}{R_3},$$

или

$$\varphi_a (g_1 + g_2 + g_3) = E_1 g_1 + E_2 g_2 - E_3 g_3.$$

Так как  $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \varphi_a$ , то напряжение

$$U_{ab} = \frac{E_1 g_1 + E_2 g_2 - E_3 g_3}{g_1 + g_2 + g_3}.$$

В общем случае

$$U_{ab} = \frac{\sum E_k g_k}{\sum g_k}. \quad (4.33)$$

Если в схеме присутствует ветвь с источником тока  $J_k$ , то расчетная формула метода двух узлов

$$U_{ab} = \frac{\sum E_k g_k \pm J_k}{\sum g_k}. \quad (4.34)$$

Значения  $E_k$  и  $J_k$  подставляют в формулы положительными, если их направления в ветвях противоположны направлению напряжения  $U_{ab}$ , и отрицательными, если совпадают. Если в какой-либо ветви схемы ЭДС будет отсутствовать, то соответствующее слагаемое в числителе расчетной формулы исключается, но проводимость этой ветви в знаменателе остается.

Расчет цепи методом двух узлов осуществляют в такой последовательности. Задают условное положительное направление напряжения между двумя узлами и рассчитывают его, используя расчетную формулу (4.33) или (4.34). Затем задают положительные направления токов в ветвях и обозначают их на схеме. По закону Ома для участка цепи с ЭДС определяют токи в ветвях:

$$I_k = \frac{\pm U_{ab} \pm E_k}{R_k} = (\pm U_{ab} \pm E_k) g_k.$$

При этом  $U_{ab}$  и  $E_k$  принимают положительными, если их направления в схеме совпадают с принятым направлением искомого тока  $I_k$ .

Так, для цепи (рис. 4.17) уравнения для определения токов в ветвях имеют следующий вид:

$$I_1 = \frac{-U_{ab} + E_1}{R_1}; \quad I_2 = \frac{-U_{ab} + E_2}{R_2}; \quad I_3 = \frac{U_{ab} + E_3}{R_3}.$$

Результаты расчета токов проверяют по первому закону Кирхгофа.

**Пример 4.5.** Определить токи в ветвях электрической цепи (рис. 4.18), если  $E_1 = 8$  В,  $E_3 = 3$  В,  $R_1 = R_3 = 2$  Ом,  $R_2 = 4$  Ом.

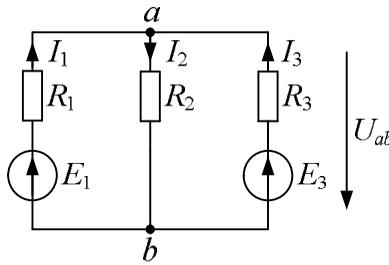


Рис. 4.18

**Решение.** Задачу решаем методом двух узлов.

Зададим положительное направление напряжения между узлами  $U_{ab}$  и обозначим его на схеме. Используя расчетную формулу (4.33) метода двух узлов, определяем напряжение:

$$U_{ab} = \frac{E_1 \frac{1}{R_1} + E_3 \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{8 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = 4,4 \text{ В.}$$

Приняв произвольно направления токов в ветвях (рис. 4.18), определим их значения, используя закон Ома:

$$I_1 = \frac{-U_{ab} + E_1}{R_1} = \frac{-4,4 + 8}{2} = 1,8 \text{ А;}$$

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2} = \frac{4,4}{4} = 1,1 \text{ А;}$$

$$I_3 = \frac{-U_{ab} + E_3}{R_3} = \frac{-4,4 + 3}{2} = -0,7 \text{ А.}$$

Результаты расчета проверим по первому закону Кирхгофа:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0, \text{ или } 1,8 - 1,1 - 0,7 = 0.$$

Значит, расчет выполнен верно. Поскольку ток  $I_3$  имеет отрицательное значение, то его истинное направление противоположно указанному на рисунке 4.18. Следовательно, источник ЭДС с  $E_3$  является потребителем электрической энергии.

**Пример 4.6.** Определить токи в ветвях электрической цепи (рис. 4.19) методом двух узлов, если  $E_1 = 10 \text{ В}$ ,  $E_2 = 2 \text{ В}$ ,  $J = 3 \text{ А}$ ,  $R_1 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 2 \text{ Ом}$ .

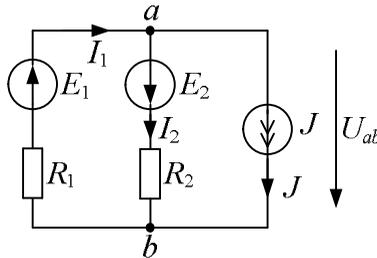


Рис. 4.19

**Решение.** Задаем условные положительные направления токов и напряжения между узлами  $a$ ,  $b$  и обозначаем их на схеме.

Определяем напряжение между двумя узлами по формуле (4.34):

$$U_{ab} = \frac{E_1 g_1 - E_2 g_2 - J}{g_1 + g_2} = \frac{10 \cdot 1 - 2 \cdot 0,5 - 3}{1 + 0,5} = 4 \text{ В,}$$

где  $g_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{1} = 1 \text{ См}$ ;  $g_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ См}$ .

Определяем токи в ветвях согласно формулам:

$$I_1 = \frac{-U_{ab} + E_1}{R_1} = \frac{-4 + 10}{1} = 6 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{U_{ab} + E_2}{R_2} = \frac{4 + 2}{2} = 3 \text{ А.}$$

Проверка по первому закону Кирхгофа:

$$I_1 - I_2 - J = 6 - 3 - 3 = 0.$$

### 4.11. Принцип и метод наложения

В некоторых случаях расчет электрических цепей можно провести относительно просто, используя *принцип наложения*. Этот принцип применяется только к линейным электрическим цепям.

Рассмотрим в качестве примера схему на рисунке 4.20, а. Укажем произвольно направления токов в ветвях и составим систему уравнений по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0; \\ I_1 R_1 - I_2 R_2 = E_1 - E_2; \\ I_2 R_2 + I_3 R_3 = E_2. \end{cases} \quad (4.35)$$

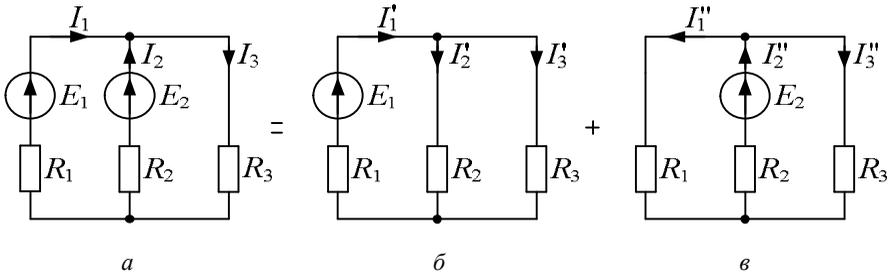


Рис. 4.20. Схемы электрических цепей для иллюстрации метода наложения

Решение системы (4.35) дает следующие выражения для токов:

$$\begin{cases} I_1 = E_1 \frac{R_2 + R_3}{A} - E_2 \frac{R_3}{A}; \\ I_2 = E_2 \frac{R_1 + R_3}{A} - E_1 \frac{R_3}{A}; \\ I_3 = E_1 \frac{R_2}{A} + E_2 \frac{R_1}{A}, \end{cases} \quad (4.36)$$

где  $A = R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3$ .

Как и следовало ожидать, значения токов определяются действием ЭДС, имеющих в схеме, т. е. каждая ЭДС вносит в ток каждой ветви свою определенную долю.

Уравнения (4.36) выражают *принцип наложения*. Он заключается в том, что ток в любой ветви сложной линейной цепи с несколькими ЭДС равен алгебраической сумме токов, вызванных в этой ветви каждой ЭДС в отдельности.

Принцип наложения используется в методе расчета, получившем название *метода наложения*.

При расчете цепей по методу наложения поступают следующим образом: поочередно рассчитывают токи от каждой из ЭДС, мысленно удаляя остальные из схемы. Находят токи в ветвях алгебраическим сложением частичных токов.

Схематично процесс приведен на рисунке 4.20, где исходная схема представлена двумя схемами по принципу наложения.

Расчет сложной электрической цепи в данном случае сводится к расчету двух более простых цепей. В цепях с одним источником ЭДС токи в ветвях направляют по направлению ЭДС.

Цепи, представленные на рисунке 4.20, б, в, имеют смешанное соединение резисторов и рассчитываются *методом «свертывания» цепи*.

Токи в исходной схеме определяют алгебраическим сложением частичных токов. В рассматриваемом примере

$$I_1 = I_1' - I_1''; \quad I_2 = -I_2' + I_2''; \quad I_3 = I_3' + I_3''.$$

Частичный ток считают положительным, если он направлен одинаково с током в той же ветви исходной схемы. Частичный ток противоположного направления считают отрицательным.

При таком подходе токи в ветвях исходной схемы могут получиться положительными или отрицательными. В последнем случае направление тока в ветви противоположно указанному на исходной схеме электрической цепи. Как правило, изменять направление тока в схеме электрической цепи не нужно.

**Пример 4.7.** В электрической цепи (рис. 4.21) определить токи, используя принцип наложения, если  $E_1 = 120$  В,  $E_2 = 250$  В,  $R_1 = 18$  Ом,  $R_2 = 20$  Ом,  $R_3 = 30$  Ом.

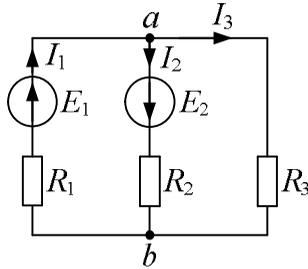


Рис. 4.21

**Решение.** На схеме цепи (рис. 4.21) произвольно указываем положительные направления токов в ветвях. Пользуясь принципом наложения, определяем токи в ветвях как алгебраическую сумму частных токов, создаваемых поочередно действующими ЭДС. Примем  $E_2 = 0$  и определим частичные токи от  $E_1$  (рис. 4.22), применяя метод эквивалентных преобразований:

$$I'_1 = \frac{E_1}{R'_{\text{эКВ}}},$$

$$\text{где } R'_{\text{эКВ}} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 18 + \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 30 \text{ Ом.}$$

$$I'_1 = \frac{120}{30} = 4 \text{ А.}$$

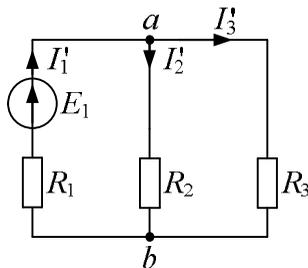


Рис. 4.22

Токи  $I'_2$  и  $I'_3$  определяем по закону Ома:

4. Расчет линейных электрических цепей постоянного тока

$$I'_2 = \frac{U'_{ab}}{R_2}, \quad I'_3 = \frac{U'_{ab}}{R_3},$$

где  $U'_{ab} = I'_1 R_{23} = 4 \cdot 12 = 48$  В.

$$I'_2 = \frac{48}{20} = 2,4 \text{ А}, \quad I'_3 = \frac{48}{30} = 1,6 \text{ А}.$$

Примем  $E_1 = 0$  и определим частичные токи от  $E_2$  (рис. 4.23).

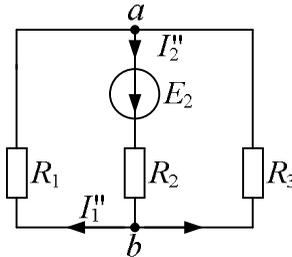


Рис. 4.23

По закону Ома ток

$$I''_2 = \frac{E_2}{R''_{\text{экв}}},$$

где  $R''_{\text{экв}} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 20 + \frac{18 \cdot 30}{18 + 30} = 31,25$  Ом.

$$I''_2 = \frac{250}{31,25} = 8 \text{ А}.$$

Токи  $I''_1$  и  $I''_3$  определим по закону Ома:

$$I''_1 = \frac{U''_{ab}}{R_1}, \quad I''_3 = \frac{U''_{ab}}{R_3},$$

где  $U''_{ab} = I''_2 R_{13} = 8 \cdot 11,25 = 90$  В.

Тогда  $I''_1 = \frac{90}{18}$  А и  $I''_3 = \frac{90}{30} = 3$  А.

С учетом произвольно указанных ранее положительных направлений токов в ветвях на схеме цепи (см. рис. 4.21) определяем их как алгебраическую сумму частичных токов:

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 4 + 5 = 9 \text{ A};$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' = 2,4 + 8 = 10,4 \text{ A};$$

$$I_3 = I_3' - I_3'' = 1,6 - 3 = -1,4 \text{ A}.$$

Знак «-» третьего тока говорит о противоположном его направлении по отношению к выбранному.

#### 4.12. Метод эквивалентного генератора

При расчете сложных электрических цепей, когда требуется определить ток в одной какой-то ветви, эту ветвь выделяют, а остальную цепь заменяют эквивалентным генератором, ЭДС которого равна напряжению холостого хода на зажимах выделенной ветви, а внутреннее сопротивление равно входному сопротивлению пассивного двухполюсника, что схематично представлено на рисунке 4.24.

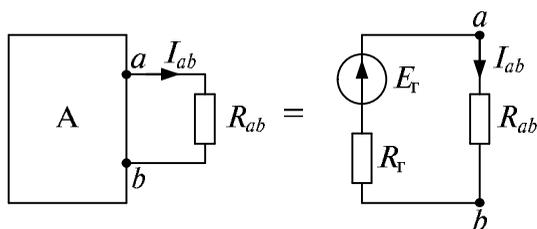


Рис. 4.24. Иллюстрация метода эквивалентного генератора

Для приведенной в правой части рисунка 4.24 цепи

$$I_{ab} = \frac{E_r}{R_r + R_{ab}}. \quad (4.37)$$

Задача состоит в определении  $E_r$  и  $R_r$  через заданные ЭДС и сопротивления сложной схемы, которая входит в активный двухполюсник.

Ток в ветви  $ab$  не изменится, если в ветвь включить две равные и противоположно направленные ЭДС  $E_1$  и  $E_2$  (рис. 4.25). На основании принципа наложения ток  $I_{ab}$  можно представить в виде суммы двух токов:  $I'_{ab}$  и  $I''_{ab}$ .

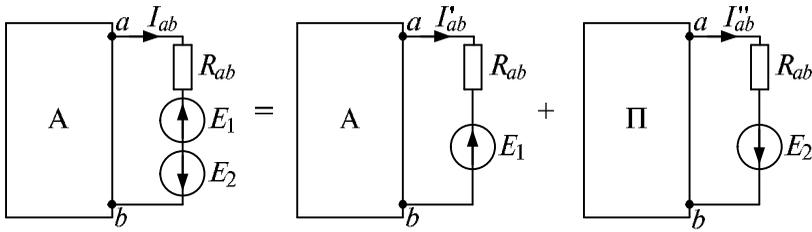


Рис. 4.25. Схемы преобразований на основании принципа наложения

В преобразованных схемах учтены все ЭДС исходной схемы, поэтому один двухполюсник принят активным, а другой пассивным.

Ток  $I'_{ab}$  вызван всеми ЭДС активного двухполюсника и ЭДС  $E_1$ , а ток  $I''_{ab}$  только ЭДС  $E_2$ .

В пассивном двухполюснике отсутствуют ЭДС, но учитываются внутренние сопротивления источников.

Для преобразованной схемы с активным двухполюсником на участке  $ab$  по закону Ома ток

$$I'_{ab} = \frac{U_{ab} - E_1}{R_{ab}}.$$

Выберем значение ЭДС  $E_1$  таким, чтобы ток  $I'_{ab}$  был равен нулю. Отсутствие тока в ветви  $ab$  означает ее размыкание, иначе – холостой ход.

Напряжение на зажимах  $ab$  при холостом ходе ветви обозначим  $U_{ab \text{ х.х}}$ . Следовательно, если принять  $E_1 = U_{ab \text{ х.х}}$ , то  $I'_{ab} = 0$ , тогда ток

$$I_{ab} = I''_{ab}.$$

Однако ток из второй схемы с пассивным двухполюсником

$$I''_{ab} = \frac{E_2}{R_{\text{вх}} + R_{ab}},$$

где  $R_{\text{вх}}$  – входное сопротивление пассивного двухполюсника относительно зажимов  $ab$ .

---

---

Но по условию  $E_2 = E_1 = U_{ab \text{ х.х.}}$ , а  $I_{ab} = I_{ab}''$ , следовательно,

$$I_{ab} = \frac{U_{ab \text{ х.х.}}}{R_{\text{вх}} + R_{ab}}. \quad (4.38)$$

Сравнивая формулы (4.37) и (4.38), находим, что  $E_{\bar{a}} = U_{ab \text{ х.х.}}$  и  $R_{\Gamma} = R_{\text{вх}}$ .

Метод расчета тока в выделенной ветви, основанный на замене активного двухполюсника эквивалентным генератором, принято называть *методом эквивалентного генератора* (это название используется чаще), *методом активного двухполюсника или методом холостого хода и короткого замыкания*.

Расчет электрической цепи методом эквивалентного генератора осуществляют в такой последовательности. Размыкают ветвь, в которой требуется определить ток. Находят напряжение на зажимах разомкнутой ветви  $U_{ab \text{ х.х.}}$ , используя второй закон Кирхгофа. Для этого токи в оставшихся ветвях схемы рассчитывают любым методом.

Затем определяют входное сопротивление  $R_{\text{вх}}$  всей схемы по отношению к зажимам  $ab$  при закороченных ЭДС. Если в электрической цепи имеются ветви с источником тока, их при определении  $R_{\text{вх}}$  принимают разомкнутыми, так как внутреннее сопротивление источников тока бесконечно большое. Ток в ветви  $I_{ab}$  определяют по формуле (4.38).

Напряжение холостого хода  $U_{ab \text{ х.х.}}$  и входное сопротивление  $R_{\text{вх}}$  могут быть определены опытным путем. В эксперименте вначале размыкают ветвь  $ab$  и измеряют вольтметром напряжение  $U_{ab \text{ х.х.}}$ . После этого закорачивают ветвь  $ab$  и амперметром измеряют ток короткого замыкания  $I_{\text{кз}}$ . Так как сопротивление  $R_{ab} = 0$ , то

$$R_{\text{вх}} = \frac{U_{ab \text{ х.х.}}}{I_{\text{кз}}}.$$

**Пример 4.8.** Определить показание амперметра методом эквивалентного генератора для электрической цепи (рис. 4.26), если  $E_1 = 20 \text{ В}$ ,  $E_2 = 10 \text{ В}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = 2 \text{ Ом}$ .

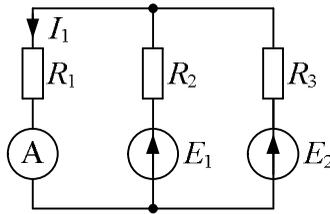


Рис. 4.26

**Решение.** Удаляем из цепи ветвь с искомым током и сопротивлением  $R_1$ . Получаем цепь в режиме холостого хода ветви  $ab$  (рис. 4.27).

Определяем напряжение на зажимах разомкнутой ветви  $U_{ab \text{ x.x}}$ , для чего определяем ток  $I_{\text{x.x}}$ :

$$I_{\text{x.x}} = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_3} = \frac{20 - 10}{2 + 2} = 2,5 \text{ А.}$$

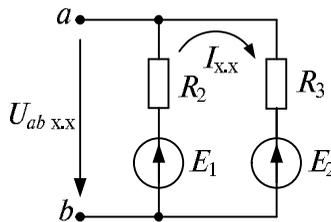


Рис. 4.27

Записываем уравнение по второму закону Кирхгофа для контура, проходящего через узлы  $a$ ,  $b$  и ветвь с  $R_2$ ,  $E_1$ :

$$I_{\text{x.x}} R_2 + U_{ab \text{ x.x}} = E_1;$$

$$U_{ab \text{ x.x}} = E_1 - I_{\text{x.x}} R_2 = 20 - 2,5 \cdot 2 = 15 \text{ В.}$$

Закорачиваем все ЭДС и определяем входное сопротивление (рис. 4.28):

$$R_{\text{вх}} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{2 \cdot 2}{2 + 2} = 1 \text{ Ом.}$$

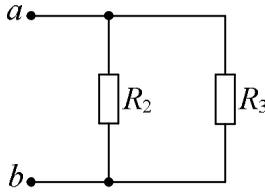


Рис. 4.28

Определяем показание амперметра, т. е. ток  $I_1$  по уравнению (4.38):

$$I_1 = \frac{U_{ab \text{ x.x}}}{R_{\text{вх}} + R_1} = \frac{15}{1+2} = 5 \text{ А.}$$



### Вопросы и задачи для самоконтроля

1. Сформулируйте первый закон Кирхгофа и правило знаков при записи уравнения.
2. Сформулируйте второй закон Кирхгофа и правило знаков при записи уравнения.
3. Раскройте суть последовательного, параллельного и смешанного соединений участков электрической цепи.
4. Поясните сущность эквивалентного преобразования схемы электрической цепи.
5. Составьте схемы и найдите эквивалентное сопротивление при последовательном и параллельном соединениях резистивных элементов.
6. Определите, сколько всего уравнений необходимо составить для расчета токов в сложных цепях по законам Кирхгофа. Сколько уравнений по первому и сколько по второму законам Кирхгофа?
7. Изложите последовательность расчета токов сложных электрических цепей методом контурных токов.
8. Запишите закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС. Как определяют знаки напряжения на участке цепи и ЭДС?
9. Изложите последовательность расчета сложных электрических цепей методом узловых потенциалов.

10. Изложите последовательность расчета сложных электрических цепей методом двух узлов.

11. Сформулируйте принцип наложения и запишите последовательность расчета токов по методу наложения.

12. Обоснуйте использование метода эквивалентного генератора. Как определяют ЭДС и внутреннее сопротивление эквивалентного генератора?

13. В схеме электрической цепи, представленной на рисунке 4.29, определите число узлов, ветвей и независимых контуров. Укажите произвольно направления токов в каждой ветви. Составьте уравнения по первому закону Кирхгофа для каждого узла и по второму закону Кирхгофа для каждого независимого контура.  
 Ответ: узлов – 3; ветвей – 5; независимых контуров – 6.

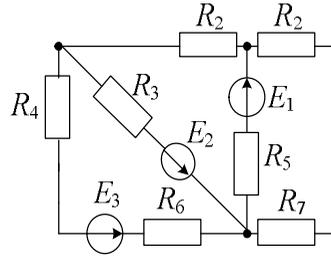


Рис. 4.29

14. Определите эквивалентные сопротивления между зажимами  $a-b$ ,  $g-c$ ,  $g-d$ ,  $c-d$  (рис. 4.30), если  $R_1 = 6$  Ом,  $R_2 = 15$  Ом,  $R_3 = 5$  Ом,  $R_4 = 30$  Ом,  $R_5 = 6$  Ом. Ответ:  $R_{ab} = 12$  Ом;  $R_{gc} = 4$  Ом;  $R_{gd} = 6$  Ом;  $R_{cd} = 4$  Ом.

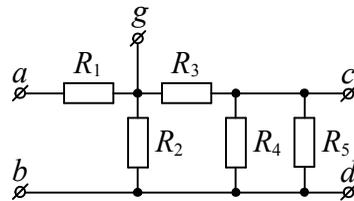


Рис. 4.30

15. В электрической цепи (рис. 4.31)  $U = 100$  В,  $I = 5$  А,  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 6$  Ом. Определите  $R_3$ ,  $R_3$ ,  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$ . Ответ:  $R_3 = 4$  Ом;  $R_3 = 20$  Ом;  $U_1 = 50$  В;  $U_2 = 30$  В;  $U_3 = 20$  В.

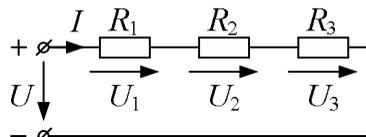


Рис. 4.31

16. Определите токи и мощность источника питания в схеме электрической цепи (рис. 4.32), если  $E = 36$  В,  $R_1 = R_2 = 2$  Ом,  $R_3 = 3$  Ом,  $R_4 = 1$  Ом,  $R_5 = 2$  Ом,  $R_6 = 3$  Ом. Ответ:  $I_1 = 6$  А;  $I_3 = 4$  А;  $I_4 = 2$  А;  $P = 216$  Вт.

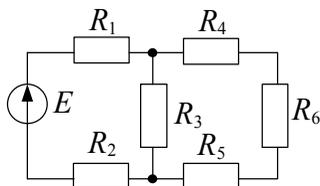


Рис. 4.32

17. Определите ток  $I$  через источник ЭДС  $E$  в схеме (см. рис. 4.8, а), если  $R_{12} = 6$  Ом,  $R_{23} = 1$  Ом,  $R_{31} = 3$  Ом,  $R_{24} = 2,4$  Ом,  $R_{43} = 1,7$  Ом,  $E = 12$  В. Ответ: 4 А.

*Указание.* Задачу решите, преобразуя треугольник резисторов  $R_{12}$ ,  $R_{23}$ ,  $R_{31}$  в эквивалентную звезду.

18. Определите ток  $I$  через источник  $E$  в схеме рисунка 4.10, а, если  $R_1 = 6$  Ом,  $R_2 = 18$  Ом,  $R_3 = 30$  Ом,  $R_4 = 30$  Ом,  $R_5 = 90$  Ом,  $R_6 = 30$  Ом,  $E = 60$  В. Ответ: 5 А.

*Указание.* Задачу решите, преобразуя звезду резисторов  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  в эквивалентный треугольник.

19. Составьте систему уравнений по законам Кирхгофа для расчета токов в ветвях электрической цепи (рис. 4.33).

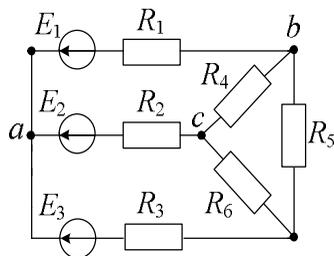


Рис. 4.33

20. Для цепи, схема которой приведена на рисунке 4.12, заданы:  $E_1 = 100$  В,  $E_2 = 80$  В,  $E_3 = 60$  В,  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 20$  Ом,  $R_3 = 40$  Ом,  $R_4 = 15$  Ом,  $R_5 = 5$  Ом. Определите токи в электрической цепи методом контурных токов. Ответ:  $I_1 = 3,53$  А;  $I_2 = -4,6$  А;  $I_3 = 1,07$  А.

*Указание.* Направление токов в ветвях принять к верхнему узлу схемы электрической цепи.

21. В электрической цепи (рис. 4.34) определите токи методом двух узлов, если  $E_1 = 100$  В,  $E_2 = 40$  В,  $R_1 = 2$  Ом,  $R_2 = 1$  Ом,  $R_3 = 2$  Ом. Ответ: значения токов по модулю  $I_1 = 47,5$  А;  $I_2 = 45$  А;  $I_3 = 2,5$  А.

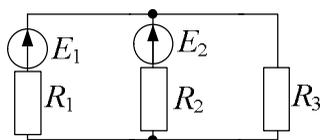


Рис. 4.34

22. Определите ток  $I$  в ветви  $bd$  (рис. 4.35) методом эквивалентного генератора, если  $E = 2$  В,  $R_1 = 1$  Ом,  $R_2 = 3$  Ом,  $R_3 = 2$  Ом,  $R_4 = 2$  Ом,  $R = 0,25$  Ом. Ответ:  $0,25$  А.

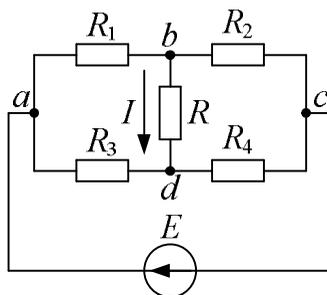


Рис. 4.35

## 5. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### 5.1. Механические силы в магнитном поле. Магнитная индукция

Электромагнитное поле представляет собой совокупность взаимно связанных электрического и магнитного полей. Таким образом, магнитное поле есть одна из сторон электромагнитного поля. Магнитное поле постоянного тока создается неизменными во времени токами, протекающими по проводящим телам, неподвижным в пространстве по отношению к наблюдателю. Магнитное поле постоянного тока можно рассматривать отдельно от электрического поля.

Основное свойство неизменного во времени магнитного поля – силовое воздействие его на проводник с током. Интенсивность магнитного поля в каждой точке пространства характеризуется вектором магнитной индукции  $\vec{B}$ ,  $[B] = \text{Тл}$  (тесла). Индукцию  $\vec{B}$  можно определить по силе, с которой действует магнитное поле на проводник длиной  $d\vec{l}$  с током согласно закону Ампера:

$$\vec{F} = I [d\vec{l}\vec{B}]. \quad (5.1)$$

Направление вектора  $d\vec{l}$  берется по направлению тока в проводнике (рис. 5.1).

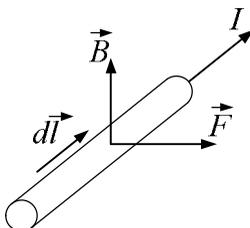


Рис. 5.1. Сила, вызываемая магнитным полем

Механическое воздействие магнитного поля на проводник с током максимально, когда  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$  взаимно перпендикулярны.

Большой практический интерес представляет выражение силы, действующей на прямолинейный проводник с током в равномерном магнитном поле, в котором на элемент длины провода (в любом месте) действует одинаковая электромагнитная сила. На основании выражения (5.1) можно записать выражение силы, действующей на часть провода  $l$ , расположенного в пределах магнитного поля:

$$F = BIl \sin \alpha, \quad (5.2)$$

где  $\alpha$  – угол между направлением вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  и длиной провода  $l$  с током  $I$ .

Если  $\alpha = 90^\circ$ , т. е. провод с током расположен перпендикулярно линиям магнитной индукции, то

$$F = BI l. \quad (5.3)$$

На провод с током, расположенный вдоль линий магнитной индукции, магнитное поле не действует.

Сила  $F$  направлена всегда перпендикулярно плоскости, в которой лежит провод и находятся линии магнитной индукции. Направление электромагнитной силы наиболее удобно определять по правилу левой руки: необходимо расположить левую руку так, чтобы вытянутые четыре пальца показывали направление тока в проводе, а линии магнитной индукции «входили» в ладонь, тогда большой палец, отогнутый перпендикулярно остальным четырем, покажет направление электромагнитной силы.

## 5.2. Линии магнитной индукции

Графически магнитное поле изображают при помощи линий магнитной индукции.

Линии вектора магнитной индукции проводника с током имеют вид концентрических окружностей с центром на оси провода (рис. 5.2).

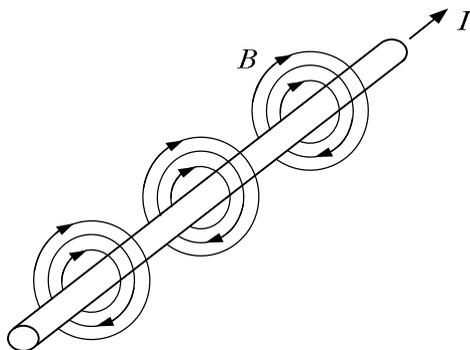


Рис. 5.2. Магнитное поле проводника с током

Касательная, проведенная к каждой точке линии магнитной индукции, совпадает по направлению с вектором  $\vec{B}$ . Направление линий магнитной индукции определяется правилом правоходового винта: если вращать винт так, чтобы острие его перемещалось по току, то направление вращения головки винта совпадет с направлением линий.

Практический интерес представляет картина магнитного поля тока катушек, так как во многих электротехнических устройствах (трансформаторы, электрические машины, электромагнитные реле и т. д.) магнитное поле создается токами в катушках различной формы.

Магнитное поле тока цилиндрической катушки изображено на рисунке 5.3. Если длина катушки значительно больше ее диаметра, то линии магнитной индукции имеют внутри катушки одинаковое направление (вдоль оси катушки) и величина магнитной индукции во всех точках одинакова, за исключением точек, расположенных у краев.

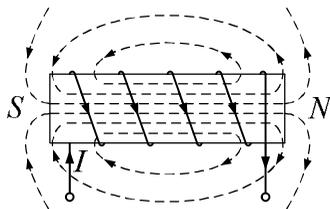


Рис. 5.3. Магнитное поле цилиндрической катушки

Магнитное поле, имеющее во всех точках одинаковую по величине и направлению магнитную индукцию, называется *однородным (равномерным)*.

По форме магнитного поля цилиндрическая катушка подобна постоянному магниту. На конце катушки, где линии магнитной индукции выходят из нее, образуется северный полюс, а на противоположном конце – южный.

Направление линий магнитной индукции поля тока катушки или контура определяется правилом правого буравчика в следующей формулировке: если рукоятку буравчика вращать по направлению тока в витках, то поступательное перемещение острия буравчика совпадает с направлением линий магнитной индукции внутри катушки.

Линии индукции магнитного поля всегда замкнуты на себя, т. е. не имеют ни начала, ни конца.

### **5.3. Напряженность магнитного поля. Магнитная проницаемость среды**

Величина индукции магнитного поля зависит как от значения тока, так и от среды, окружающей проводник. Опыт показывает, что любое вещество, внесенное в магнитное поле, намагничивается. Внутримолекулярные токи под действием внешнего поля определенным образом ориентируются, и их магнитное поле в сочетании с внешним образует результирующее магнитное поле.

Если хотят охарактеризовать магнитный эффект тока вне зависимости от среды, то рассматривают другую векторную величину – напряженность магнитного поля  $\vec{H}$ , связанную с вектором магнитной индукции  $\vec{B}$  соотношением

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_a},$$

где  $\mu_a$  – абсолютная магнитная проницаемость, Гн/м.

*Напряженность магнитного поля  $H$*  измеряется в амперах на метр (А/м).

---

---

Абсолютная магнитная проницаемость  $\mu_a$  характеризует магнитные свойства вещества, в котором существует магнитное поле:

$$\mu_a = \mu_0 \mu_r,$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная, или магнитная проницаемость, вакуума;

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.}$$

Величина  $\mu_r$  называется относительной магнитной проницаемостью и показывает, во сколько раз магнитное поле в веществе получается сильнее (или слабее), чем в вакууме, при прочих равных условиях, т. е.

$$\mu_r = \frac{\mu_a}{\mu_0}.$$

При решении большинства электротехнических задач достаточно подразделять все вещества на сильномагнитные (ферромагнитные), у которых  $\mu_r \gg 1$ , и слабомагнитные (практически немагнитные), у которых  $\mu_r = 1$ .

К ферромагнитным веществам относятся железо, никель, кобальт и некоторые их сплавы. Ферромагнитные вещества имеют особое значение в электротехнике, поэтому их магнитные свойства будут рассмотрены в пп. 5.10, 5.11.

#### 5.4. Магнитный поток

Магнитное поле можно характеризовать скалярной величиной – магнитным потоком

$$\Phi = \int \vec{B} d\vec{S},$$

где  $d\vec{S}$  – вектор элементарной площадки поверхности  $S$ .

В практике бывают случаи, когда магнитное поле можно считать равномерным, а поверхность, через которую определяют магнитный поток, – плоскостью, тогда

$$\Phi = BS \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между линией магнитной индукции и перпендикуляром к поверхности  $S$ .

Если угол  $\alpha = 0$ , т. е. линии магнитной индукции направлены перпендикулярно к плоскости  $S$ , то магнитный поток

$$\Phi = BS. \quad (5.3)$$

Согласно формуле (5.3), магнитная индукция является плотностью магнитного потока в данной точке поля.

*Единица измерения магнитного потока – вебер (Вб).*

### 5.5. Закон полного тока.

#### Магнитное поле прямолинейного проводника с током

Закон полного тока устанавливает связь между электрическим током и его магнитным полем. Читается он следующим образом: линейный интеграл от вектора напряженности магнитного поля вдоль замкнутого контура равен алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I.$$

Положительное направление тока связано с обходом контура правилом буравчика.

Данная интегральная форма записи закона полного тока используется для расчета магнитных полей, имеющих симметрию, например поля уединенного проводника с током.

Пусть требуется определить напряженность магнитного поля в точке, удаленной от центра проводника на расстояние  $R$  (рис. 5.4).

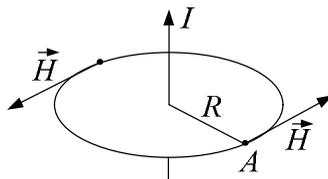


Рис. 5.4. Определение напряженности магнитного поля в точке  $A$

Проведем окружность вокруг проводника радиусом  $R$  и возьмем линейный интеграл от вектора напряженности магнитного поля вдоль этой окружности. В силу симметрии значение  $H$  на расстоянии  $R$  от оси проводника будет одинаковым. Векторы  $\vec{H}$  и  $d\vec{l}$  будут совпадать по направлению, поскольку они направлены по касательной к окружности. Поэтому

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \oint H dl \cos 0^\circ = H \oint dl = H 2\pi R = I;$$

$$H = \frac{I}{2\pi R}, \quad (5.4)$$

где  $l$  – длина окружности;  $l = 2\pi R$ .

По мере удаления от провода напряженность магнитного поля убывает.

### 5.6. Сила взаимодействия двух проводов с током в линии электропередачи

Определим силу взаимодействия двух параллельных проводов с током (рис. 5.5).

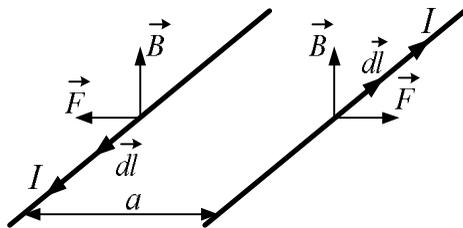


Рис. 5.5. Двухпроводная линия электропередачи

В двухпроводной линии электропередачи токи в проводах направлены навстречу друг другу. Каждый провод находится в магнитном поле, созданном током соседнего провода. Направление вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  определяется по правилу правого винта.

Согласно закону Ампера (уравнение (5.2)), сила, действующая на правый провод,

$$F = IlB \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между вектором  $\vec{B}$  и вектором  $d\vec{l}$ .

Вектор  $d\vec{l}$  и ток в элементе длины проводника имеют одинаковое направление. В рассматриваемом случае  $\alpha = 90^\circ$ , следовательно,

$$F = BIl,$$

где  $l$  – длина провода.

Согласно закону полного тока, напряженность магнитного поля от тока левого провода на расстоянии  $a$  находится из выражения (5.4), учитывая, что для рассматриваемого случая  $R = a$ :

$$H = \frac{I}{2\pi a}.$$

Соответственно магнитная индукция

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi a},$$

а сила, действующая на правый провод,

$$F = \mu_0 \frac{I^2 l}{2\pi a}.$$

Такая же сила будет действовать и на левый провод. Направление силы определяется по правилу левой руки. Действующие силы (см. рис. 5.5) отталкивают провода друг от друга.

### 5.7. Магнитное потокоцепление. Собственная индуктивность

Если на прямоугольную рамку намотать  $N$  витков из проводника и пропустить по ним ток  $I$ , то магнитный поток  $\Phi$ , созданный этим током, будет пронизывать поверхность, ограниченную контуром рамки, т. е. магнитный поток  $\Phi$  будет сцеплен с этим контуром.

Произведение числа витков и сцепленного с этими витками магнитного потока называется *потокоцеплением*:

$$\Psi = N\Phi.$$

Потокосцепление, характеризующее связь тока с собственным магнитным полем, называется *собственным* или *потокосцеплением самоиндукции*.

Магнитный поток  $\Phi$  создан электрическим током, следовательно, собственное потокосцепление  $\Psi$  катушки прежде всего зависит от тока в катушке. Кроме того, на потокосцепление будут влиять число витков, форма, размеры контура и среда, в которой создается магнитное поле. Для учета этого влияния введено понятие индуктивности катушки (контура):

$$\Psi = LI, \quad (5.5)$$

где  $L$  – индуктивность, Гн.

Из выражения (5.5) видно, что собственная индуктивность катушки, характеризующая связь собственного потокосцепления и тока, численно равна отношению собственного потокосцепления катушки к току в ней:

$$L = \frac{\Psi}{I}. \quad (5.6)$$

В неферромагнитной среде отношение (5.6) для данной катушки (контура) остается неизменным, т. е. не зависит от значений тока и потокосцепления.

В практических расчетах индуктивность часто выражается в долях генри: миллигенри (мГн) или микрогенри (мкГн).

$$1 \text{ мГн} = 10^{-3} \text{ Гн}; \quad 1 \text{ мкГн} = 10^{-6} \text{ Гн}.$$

## 5.8. Взаимная индуктивность. Коэффициент связи

Рассмотрим магнитную связь двух катушек (контуров), удаленных друг от друга на некоторое расстояние (рис. 5.6).

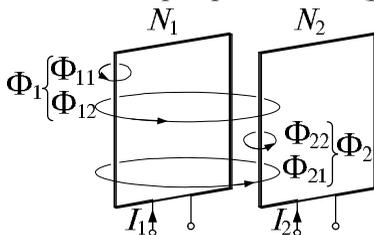


Рис. 5.6. Магнитная связь между катушками

В первой катушке с числом витков  $N_1$  протекает ток  $I_1$ , во второй с числом витков  $N_2$  – ток  $I_2$ .

Поток  $\Phi_1$ , создаваемый током  $I_1$ , частично замыкается, минуя второй контур ( $\Phi_{11}$ ), частично проходит через него ( $\Phi_{12}$ ). Для удобства на рисунке 5.6 изображено только по одной линии магнитной индукции каждого из потоков.

В свою очередь поток  $\Phi_2$ , созданный током  $I_2$ , частично замыкается, минуя первый контур ( $\Phi_{22}$ ), частично проходит через него ( $\Phi_{21}$ ).

Собственное потокосцепление первой катушки

$$\Psi_1 = \Phi_1 N_1 = L_1 I_1.$$

Взаимное потокосцепление первой катушки

$$\Psi_{21} = \Phi_{21} N_1.$$

Взаимное потокосцепление первой катушки можно записать пропорционально току  $I_2$ , создающему поток  $\Phi_{21}$ :

$$\Psi_{21} = M I_2. \quad (5.7)$$

Собственное потокосцепление второй катушки

$$\Psi_2 = \Phi_2 N_2 = L_2 I_2.$$

Взаимное потокосцепление второй катушки

$$\Psi_{12} = \Phi_{12} N_2.$$

Взаимное потокосцепление второй катушки пропорционально току  $I_1$ , создающему поток  $\Phi_{12}$ :

$$\Psi_{12} = M I_1. \quad (5.8)$$

Коэффициент  $M$  называют взаимной индуктивностью контуров (катушек). Он зависит от размеров и формы контуров, от их взаимного расположения, числа витков и от магнитных свойств среды. Взаимная индуктивность измеряется в генри (Гн).

Из выражений (5.7) и (5.8) видно, что взаимная индуктивность двух катушек (контуров) численно равна отношению взаимного потокосцепления одной катушки к току в другой катушке:

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_2} = \frac{\Psi_{12}}{I_1}.$$

Под коэффициентом связи  $K$  двух магнитно-связанных контуров с индуктивностями  $L_1$ ,  $L_2$  и взаимной индуктивностью  $M$  понимают отношение  $M$  к  $\sqrt{L_1 L_2}$ :

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}.$$

Коэффициент связи теоретически может изменяться от 0 до 1.

Коэффициент связи  $K = 1$ , если весь поток, создаваемый первым контуром, будет сцепляться со вторым. Практически такого достигнуть сложно, поэтому всегда  $K < 1$ .

В системе магнитно-связанных контуров (катушек) различают согласное и встречное включение.

В общем случае полное потокосцепление первой катушки

$$\Psi_{1\text{полн}} = (\Phi_1 \pm \Phi_{21})N_1 = \Psi_1 \pm \Psi_{21}. \quad (5.9)$$

Полное потокосцепление второй катушки

$$\Psi_{2\text{полн}} = (\Phi_2 \pm \Phi_{12})N_2 = \Psi_2 \pm \Psi_{12}. \quad (5.10)$$

Знак «+» в выражениях (5.9) и (5.10) следует ставить в том случае, если взаимный поток будет направлен согласно с собственным потоком, создаваемым током данного контура. При несогласном (встречном) направлении следует ставить знак «-».

Изменяя направление тока или направление намотки одной из катушек, получают согласное или встречное включение.

При встречном включении катушек можно добиться такого положения, когда потоки обеих катушек, определенные порознь, равны, а результирующий поток равен нулю.

Если требуется получить катушку практически без индуктивности, можно применить бифилярную обмотку, которая выполняется проводом, сложенным вдвое.

Магнитный поток, а следовательно, и индуктивность бифилярно намотанной катушки практически равны нулю, так как каждый виток ее состоит из двух проводников с противоположным направлением тока (рис. 5.7).

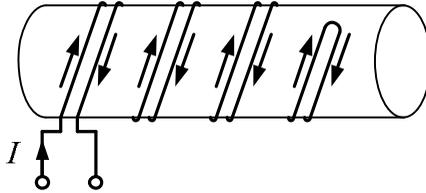


Рис. 5.7. Катушка с бифилярной обмоткой

### 5.9. Магнитное поле, индуктивность катушки на кольцевом сердечнике и цилиндрической катушки

Если на кольцевой сердечник – тороид, выполненный из материала с магнитной проницаемостью  $\mu_a > \mu_0$ , нанести обмотку так, что витки будут плотно охватывать тороид по всей длине, то весь магнитный поток практически будет сосредоточен в сердечнике (рис. 5.8). Линии вектора напряженности  $\vec{H}$  представляют собой окружности, сцепляющиеся со всеми витками.

По закону полного тока

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \oint H dl \cos 0 = H \oint dl = H 2\pi R = IN;$$

$$H = \frac{IN}{2\pi R};$$

$$B = \mu_a H = \frac{\mu_a IN}{2\pi R}.$$

Как видим, магнитное поле в сердечнике неравномерное. Магнитная индукция  $B$  зависит от  $R$ .

Если  $\frac{R_2}{R_1} < 1,5$ , т. е.  $R_1$  и  $R_2$  незначительно отличаются друг от друга, то можно считать, что магнитное поле в тороиде распределено равномерно, и расчет следует вести по средней линии сердечника  $l$  и площади сечения тороида  $S$ .

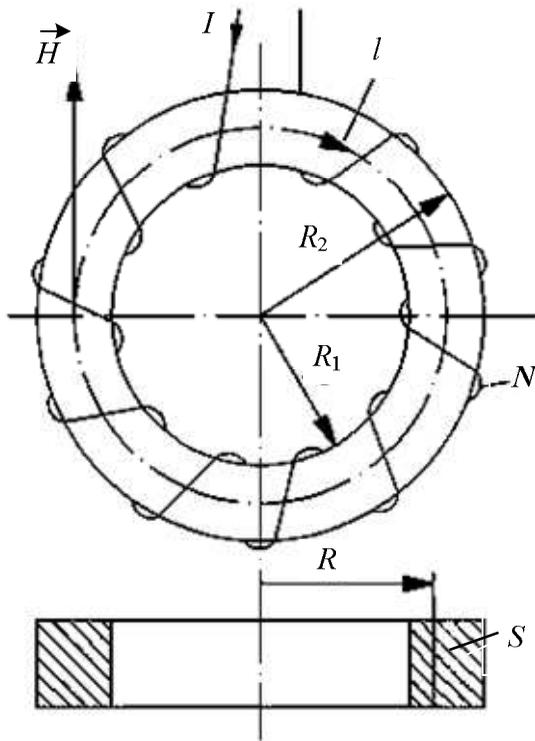


Рис. 5.8. К расчету индуктивности катушки на кольцевом сердечнике

Тогда напряженность магнитного поля

$$H = \frac{IN}{l}.$$

Магнитная индукция

$$B = \mu_a H = \frac{\mu_a IN}{l}. \quad (5.11)$$

Магнитный поток

$$\Phi = BS = \frac{\mu_a NS}{l}.$$

Потокосцепление  $\Psi = \Phi N$ .

Индуктивность кольцевой катушки

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_a N^2 S}{l}. \quad (5.12)$$

Формула (5.12) может быть использована также для определения индуктивности катушки на цилиндрическом сердечнике (соленоиде) (рис. 5.9), рассматривая его как тороид бесконечно большого радиуса.

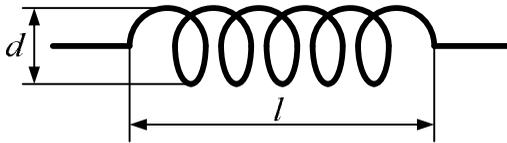


Рис. 5.9. Катушка на цилиндрическом сердечнике

Для катушки конечной длины  $l$  с  $\mu_a = \mu_0$ , т. е. с неферромагнитным сердечником, можно записать

$$L = K \frac{\mu_0 N^2 S}{l},$$

где коэффициент  $K < 1$ , учитывающий, что не весь магнитный поток в такой катушке пронизывает все витки. Он зависит от отношения диаметра  $d$  витков катушки к ее длине  $l$ ; при  $\frac{d}{l} = 0,1$  коэффициент

$K = 0,96$ , при  $\frac{d}{l} < 0,1$  принимают  $K \approx 1$ .

**Пример 5.1.** Определить индуктивность катушки на кольцевом неферромагнитном сердечнике прямоугольного поперечного сечения  $S = 8 \text{ см}^2$ , имеющем наружный радиус  $R_2 = 11 \text{ см}$ , внутренний  $R_1 = 9 \text{ см}$ , число витков  $N = 1000$  (см. рис. 5.8).

**Решение.** По формуле (5.12) индуктивность кольцевой катушки

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}.$$

---

Длина средней линии кольцевого сердечника

$$l = 2\pi \frac{(R_1 + R_2)}{2} = 2\pi \frac{(0,11 + 0,09)}{2} = 2\pi \cdot 10 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Находим

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{1000^2 \cdot 8 \cdot 10^{-4}}{2\pi \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 16 \cdot 10^{-4} \text{ Гн} = 1,6 \text{ мГн.}$$

**Пример 5.2.** На кольцевой сердечник из неферромагнитного материала, диаметр которого по средней линии  $D = 20$  см, намотаны две обмотки с числом витков  $N_1 = 800$  и  $N_2 = 300$ . Определить магнитную индукцию в центре сечения сердечника при согласном и встречном включении обмоток и токе в них  $I = 5$  А.

**Решение.** В соответствии с формулами (5.9)–(5.11) магнитная индукция при согласном включении обмоток

$$B_{\text{согл}} = \mu_0 I \frac{N_1 + N_2}{l}.$$

При встречном включении обмоток

$$B_{\text{встр}} = \mu_0 I \frac{N_1 - N_2}{l}.$$

Длина средней линии сердечника  $l = \pi D = \pi \cdot 20 \cdot 10^{-2}$  м.

Находим

$$B_{\text{согл}} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot \frac{800 + 300}{\pi \cdot 20 \cdot 10^{-2}} = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ Тл};$$

$$B_{\text{встр}} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot \frac{800 - 300}{\pi \cdot 20 \cdot 10^{-2}} = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ Тл.}$$

## 5.10. Намагничивание вещества. Элементы теории ферромагнетизма

Любое вещество, находящееся в магнитном поле внешних токов, приходит в особое состояние намагниченности, характеризующееся возникновением в нем добавочного магнитного поля.

Движение заряженных частиц внутри атома можно рассматривать как элементарные внутриатомные токи, поэтому добавочное

магнитное поле, возникшее в результате намагничивания, будем называть *полем элементарных (внутренних) токов*.

Магнитные свойства элементарного кругового тока (рис. 5.10) можно характеризовать вектором магнитного момента, величина которого определяется произведением элементарного кругового тока и площади описанного им круга, а направление – по правилу буравчика:

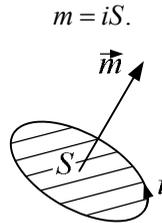


Рис. 5.10. Магнитный момент элементарного кругового тока

При отсутствии магнитного поля внешних токов элементарные токи внутри вещества ориентированы беспорядочно, поэтому суммарный магнитный момент оказывается равным нулю, а магнитное поле элементарных токов не обнаруживается.

Под влиянием магнитного поля внешних токов меняется ориентация осей вращения элементарных токов и их магнитные моменты направлены в одну сторону. Это явление называют *намагничиванием вещества*.

Интенсивность и характер намагничивания у различных веществ в одинаковом магнитном поле внешних токов значительно отличаются.

Вещества, в которых магнитное поле элементарных токов направлено против поля внешних токов, т. е. ослабляющие внешнее магнитное поле, называют *диамагнетиками*. У них относительная магнитная проницаемость  $\mu_r < 1$ , например у висмута  $\mu_r = 0,99983$ .

Вещества, усиливающие магнитное поле, называют *парамагнетиками* ( $\mu_r > 1$ , например, у платины  $\mu_r = 1,00036$ ). Существуют вещества (железо, никель, кобальт и некоторые сплавы), способные вызывать большое усиление внешнего магнитного поля. Это *ферромагнитные материалы*, имеющие  $\mu_r = 10^3 \dots 10^6$ .

---

Особенность ферромагнитных веществ – наличие сильных магнитных связей молекул, вследствие чего в них образуются весьма малые (микроскопические) области, внутри которых магнитные моменты молекул ориентированы в одну сторону. Такие области имеют значительный общий магнитный момент и называются *самопроизвольно намагниченными*.

При отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты самопроизвольно намагниченных областей направлены беспорядочно, и ферромагнитные вещества не проявляют своих магнитных свойств.

Если же ферромагнитное тело поместить во внешнее магнитное поле, то под его действием векторы намагниченности отдельных областей будут поворачиваться по внешнему полю. В результате индукция результирующего магнитного поля оказывается во много раз больше, чем магнитная индукция внешнего поля до помещения в него ферромагнитного тела.

Электрические машины, трансформаторы и многие электротехнические устройства создают на основе ферромагнитных материалов для увеличения магнитного потока и для сосредоточения магнитного поля в заданной области пространства.

### **5.11. Характеристики ферромагнитных материалов**

Свойства ферромагнитных материалов принято характеризовать зависимостью магнитной индукции  $B$  от напряженности магнитного поля  $H$ .

Различают два основных типа зависимости  $B(H)$ : кривые намагничивания и гистерезисные петли.

Под *кривыми намагничивания* понимают однозначную зависимость между  $B$  и  $H$ , т. е. каждому значению  $B$  соответствует определенное значение  $H$ .

Если ток в обмотке кольцевого магнитопровода (см. рис. 5.8), изготовленного из ферромагнитного материала, плавно изменять от положительного максимального значения  $+I_{\max}$  до отрицательного максимального значения  $-I_{\max}$  и затем в обратной последовательности, то зависимость  $B(H)$  после ряда циклов перемагничивания

ния при значениях  $B$  и  $H$  меньше тех, которые соответствуют полному насыщению, получается в виде симметричных петель магнитного гистерезиса (рис. 5.11).

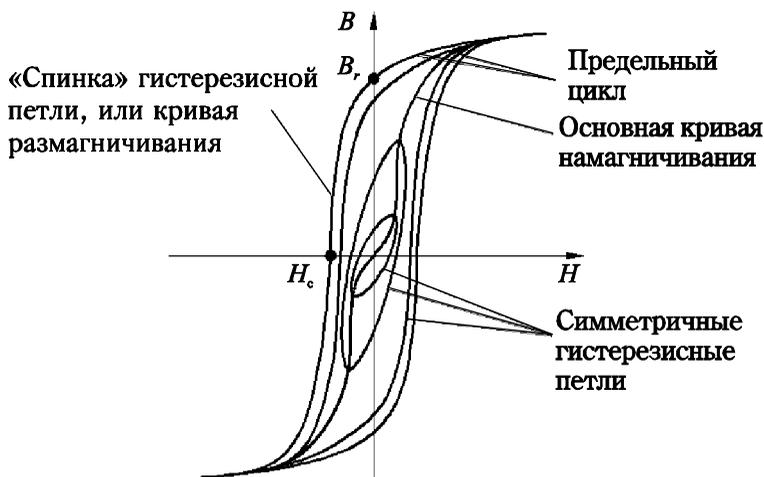


Рис. 5.11. Симметричные петли гистерезиса

Кривую, проведенную через вершины всех симметричных гистерезисных петель, называют *основной кривой намагничивания*.

Каждый из отрезков, отсекаемых петлей гистерезиса на оси ординат (при  $H = 0$ ), определяет остаточную индукцию ( $B_r$  и  $-B_r$ ), а каждый отрезок, отсекаемый той же петлей на оси абсцисс (при  $B = 0$ ), — коэрцитивную (задерживающую) силу ( $H_c$  и  $-H_c$ ).

Таким образом, гистерезисная петля представляет собой неоднозначную зависимость  $B(H)$  и характеризует отставание изменения магнитной индукции  $B$  от изменения напряженности магнитного поля  $H$ .

*Предельной гистерезисной петлей* или *предельным циклом* называют симметричную гистерезисную петлю, снятую при очень больших значениях напряженности  $H_{\max}$ . Участок предельного цикла  $B_r H_c$  (см. рис. 5.11) принято называть *кривой размагничивания* или *«спинкой» гистерезисной петли*. Этой кривой пользуются

---

---

при расчете постоянных магнитов и магнитных элементов запоминающих устройств вычислительной техники.

Участок основной кривой намагничивания при очень больших  $H$ , вблизи  $\pm H_{\max}$ , где восходящая и нисходящая части предельной петли практически сливаются, называется *областью магнитного насыщения*. Это означает, что все магнитные моменты самопроизвольно намагниченных областей ориентированы по направлению внешнего поля.

Остаточный магнетизм ( $\pm B_r$ ) объясняется тем, что при снятии внешнего поля определенная часть магнитных моментов сохраняет приобретенное при намагничивании направление, поэтому магнитная индукция и магнитный поток в сердечнике не уменьшаются до нуля некоторое время.

Напряженность  $\pm H_c$ , названная коэрцитивной (задерживающей) силой, компенсирует поле намагниченности сердечника. В результате ее действия магнитная индукция  $B$  и магнитный поток  $\Phi$  в сердечнике уменьшаются до нуля.

Абсолютная магнитная проницаемость  $\mu_a$  ферромагнитного вещества в каждой точке основной кривой намагничивания определяется отношением

$$\mu_a = \frac{B}{H}.$$

Как видим (см. рис. 5.11), с ростом напряженности поля  $H$  магнитная проницаемость вначале увеличивается, а при переходе в область насыщения уменьшается, т. е. относительная магнитная проницаемость ферромагнитных веществ  $\mu_r$  – величина непостоянная и зависит от напряженности магнитного поля.

Основную кривую намагничивания используют при расчетах магнитных цепей.

Петлю гистерезиса приходится учитывать при расчетах электрических цепей синусоидального тока, содержащих катушки с ферромагнитным сердечником.

Для всех ферромагнитных материалов, используемых в электротехнике, кривые намагничивания и петли гистерезиса приводятся в справочниках в виде графиков или таблиц.

Для примера на рисунке 5.12 приведены основные кривые намагничивания некоторых марок сталей.

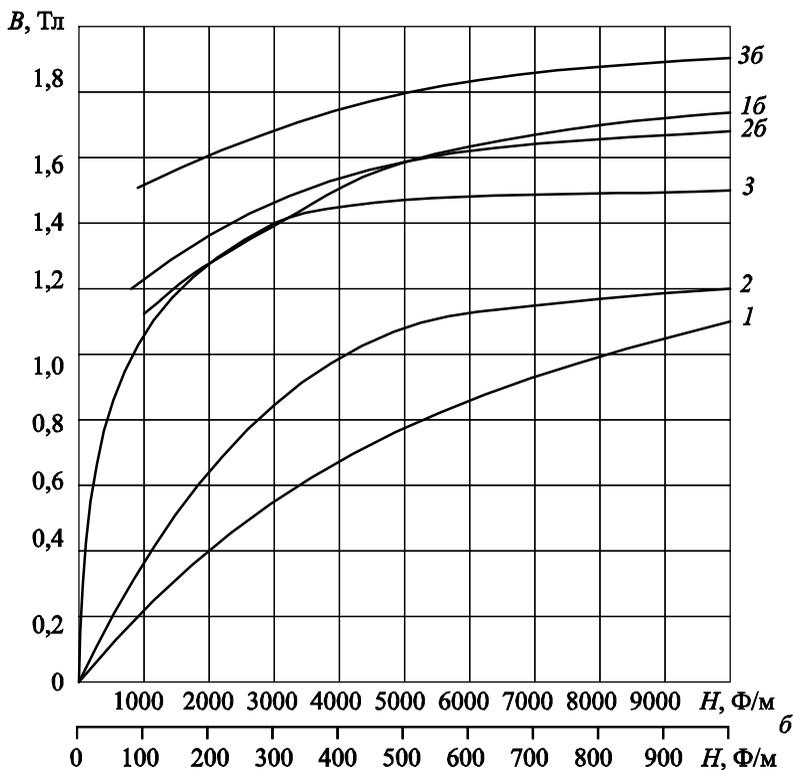


Рис. 5.12. Основные кривые намагничивания  $B(H)$  различных марок сталей:  
 1 – литая сталь; 2 – листовая электротехническая сталь 1512 (горячекатаная);  
 3 – листовая электротехническая сталь 3411 (холоднокатаная)

### 5.12. Виды ферромагнитных материалов

Ферромагнитные материалы можно классифицировать по магнитным свойствам. Различают магнитомягкие, магнитотвердые материалы, магнитодиэлектрики и ферриты.

*Магнитомягкие материалы* обладают круто поднимающейся основной кривой намагничивания и относительно малыми площадями гистерезисных петель. Их применяют во всех устройствах, которые работают или могут работать при периодически изменяющихся магнитных потоках (трансформаторах, электрических двигателях, генераторах, индуктивных катушках и т. п.). Поскольку потери энергии на перемагничивание пропорциональны площади гистерезисной петли, то у магнитомягких материалов (электротехнические стали, железоникелевые сплавы типа пермаллоя, перминвара и др.) эти потери небольшие.

Некоторые магнитомягкие материалы (например, перминвар, сплавы 68НМП и др.) обладают петлей гистерезиса по форме, близкой к прямоугольной (рис. 5.13, кривая 1). Такие материалы получили распространение в устройствах автоматики и вычислительной техники.

*Магнитотвердые материалы* имеют полого поднимающуюся основную кривую намагничивания и большую площадь гистерезисной петли (рис. 5.13, кривая 2). Чаще всего их используют для изготовления постоянных магнитов. В группу магнитотвердых материалов входят углеродистые стали, сплавы магнико, вольфрамовые, платиново-кобальтовые и сплавы на основе редкоземельных элементов.

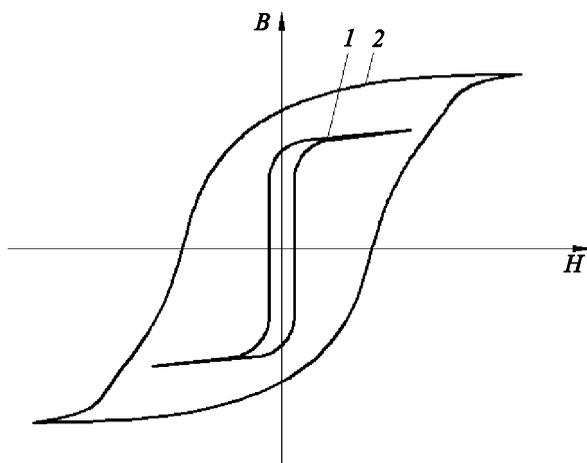


Рис. 5.13. Гистерезисные петли магнитомягкого 1 и магнитотвердого 2 материалов

В радиотехнических, телевизионных и других устройствах, где используют высокочастотные сигналы, сердечники индуктивных катушек изготавливают из магнитодиэлектриков или ферритов.

*Магнитодиэлектрики* получают путем смешивания, формования и запекания мелкоизмельченного порошка магнетита, железа или пермаллоя с диэлектриком. Так как каждую ферромагнитную крупинку обволакивает пленка из диэлектрика, то сердечники из магнитодиэлектриков не насыщаются.

*Ферриты* – это ферромагнитные материалы. Магнитомягкие ферриты изготавливают из оксидов железа, марганца и цинка или из оксидов железа, никеля и цинка путем формования и обжига. Магнитотвердые ферриты получают на основе феррита бария.

В отличие от магнитодиэлектриков ферриты могут насыщаться.



### Вопросы и задачи для самоконтроля

1. Назовите величины, характеризующие магнитное поле, запишите, как они связаны между собой.
2. Сформулируйте и запишите закон Ампера.
3. Сформулируйте и запишите закон полного тока.
4. Поясните, испытывает ли уединенный провод механические усилия при прохождении по нему тока.
5. Поясните, при помощи каких величин определяют значение индуктивности.
6. Объясните, как изменится индуктивность  $L$  катушки на кольцевом сердечнике, если неферромагнитный сердечник заменить стальным с относительной магнитной проницаемостью  $\mu_r = 800$ .  
Ответ: увеличится в 800 раз.
7. В равномерном магнитном поле с индукцией  $B = 1,2$  Тл помещен прямолинейный проводник длиной  $l = 50$  см с током  $I = 10$  А. Определите силу, действующую на проводник, если он расположен перпендикулярно направлению линий магнитной индукции. Ответ:  $F = 6$  Н.
8. Определите магнитную индукцию  $B$ , если в равномерном магнитном поле контур площадью  $S = 10$  см<sup>2</sup>, расположенной перпен-

---

---

дикулярно линиям магнитной индукции, пронизывает магнитный поток  $\Phi = 10 \cdot 10^{-4}$  Вб. Ответ:  $B = 1$  Тл.

9. На поверхности проводника с током, расположенного в воздухе, напряженность магнитного поля  $H = 100$  А/м. Определите магнитную индукцию  $B$ . Ответ:  $B = 1,256 \cdot 10^{-4}$  Тл.

10. По прямому цилиндрическому проводу радиусом  $R_0 = 0,02$  м протекает ток  $I = 100$  А. Найдите напряженность магнитного поля на поверхности провода и на расстоянии  $R = 0,4$  м от оси провода. Ответ: 796 А/м; 398 А/м.

11. Определите силу взаимодействия двух проводов линии электропередачи постоянного тока  $I = 1000$  А, если расстояние между проводами  $a = 0,5$  м, длина линии 100 м. Ответ:  $F = 40$  Н.

12. Катушка с числом витков  $N = 150$  и током  $I = 5$  А создает магнитный поток  $\Phi = 0,1 \cdot 10^{-4}$  Вб. Определите индуктивность  $L$  катушки. Ответ:  $L = 3 \cdot 10^{-4}$  Гн.

13. Индуктивности обмоток трансформатора:  $L_1 = 0,45$  Гн и  $L_2 = 0,2$  Гн. Определите взаимную индуктивность обмоток, если коэффициент связи между ними 0,9. Ответ:  $M = 0,27$  Гн.

## 6. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### 6.1. Основные понятия и разновидности магнитных цепей

*Магнитной цепью* называют совокупность устройств, содержащих катушки с током, ферромагнитные тела или иные среды и образующих замкнутую систему, в которой существует магнитный поток и вдоль которой замыкаются линии магнитной индукции.

Магнитные цепи подразделяют на неразветвленные и разветвленные.

В *неразветвленной магнитной цепи* (рис. 6.1, *а*) по всем участкам проходит один и тот же магнитный поток. Основной поток  $\Phi_0$  концентрируется в сердечнике, а поток рассеяния  $\Phi_p$  замыкается частично или полностью по воздуху.

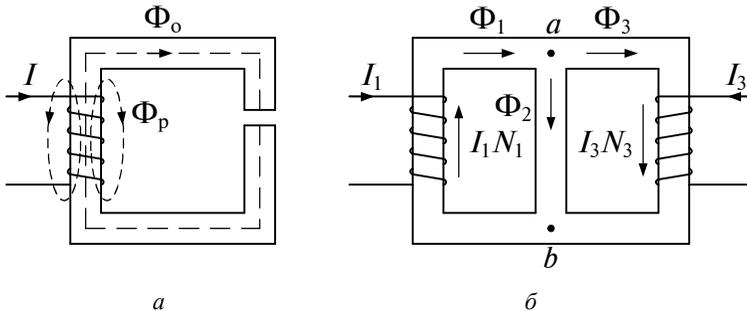


Рис. 6.1. Схемы неразветвленной (а) и разветвленной (б) магнитных цепей

В расчетах потоком рассеяния обычно пренебрегают. По аналогии с электрическими цепями при рассмотрении магнитных цепей также используют понятия ветвь, узел и контур.

В схеме *разветвленной магнитной цепи* (рис. 6.1, *б*) имеются два узла, в которых соединяются три ветви. В каждой ветви проходит свой магнитный поток.

Электрические двигатели, генераторы, трансформаторы и другие электромагнитные аппараты конструируют так, чтобы магнитный поток в них был по возможности наибольшим. Введение ферромагнитного материала в магнитную цепь значительно усиливает и концентрирует в заданной области магнитное поле, придает ему нужную конфигурацию.

При расчете магнитных цепей используют такие скалярные величины, как магнитный поток  $\Phi$ , магнитодвижущая сила (МДС)  $F$ , магнитное напряжение (падение магнитного напряжения)  $U_m$ .

*Магнитный поток* определяется как поток вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  через поверхность  $S$  поперечного сечения магнитопровода:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

При равномерном магнитном поле

$$\Phi = BS. \quad (6.1)$$

*Магнитодвижущая (намагничивающая) сила* выражается произведением числа витков катушки  $N$  на величину протекающего по ней тока  $I$ :

$$F = IN.$$

Магнитодвижущая сила создает магнитный поток в магнитной цепи подобно тому, как ЭДС вызывает электрический ток в электрической цепи. Для определения положительного направления МДС пользуются правилом правого винта: если винт вращать по направлению тока в обмотке, то движение острия укажет направление МДС (рис. 6.2).

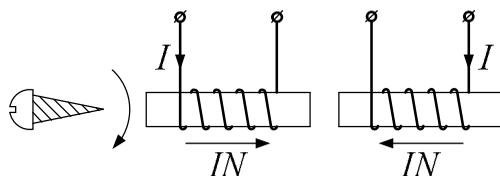


Рис. 6.2. Определение положительного направления МДС по правилу правого винта

Для этих же целей можно воспользоваться мнемоническим правилом: если сердечник мысленно охватить правой рукой, расположив ее пальцы по току в обмотке, то отогнутый под  $90^\circ$  большой палец укажет направление МДС. Очевидно, что направление МДС зависит от направления тока и направления намотки провода в обмотке.

*Падением магнитного напряжения* между точками  $a$  и  $b$  магнитной цепи называют линейный интеграл от вектора напряженности  $H$  магнитного поля между этими точками по длине участка:

$$U_M = \int_a^b \vec{H} d\vec{l},$$

где  $d\vec{l}$  – элемент длины участка магнитной цепи.

Если напряженность поля по всей длине участка одинакова, падение магнитного напряжения определяют по выражению

$$U_M = H l_{ab}.$$

В том случае, когда участок магнитной цепи между точками  $a$  и  $b$  может быть подразделен на несколько отдельных частей так, что для каждой части напряженность поля неизменна, то падение магнитного напряжения на всем участке равно сумме падений напряжений на всех его частях:

$$U_M = \sum_{k=1}^n H_k l_k.$$

*Единица измерения МДС и падения магнитного напряжения* – ампер (А).

## 6.2. Законы магнитных цепей

В основе расчета магнитных цепей лежат определенные законы.

Исходя из принципа непрерывности магнитного потока, сумма вошедших в объем и вышедших из объема магнитных потоков равна нулю, т. е.

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

---

---

При охвате замкнутой поверхностью  $S$  нескольких сечений магнитопровода

$$\sum \Phi = 0. \quad (6.2)$$

Уравнение (6.2) выражает *первый закон Кирхгофа*: алгебраическая сумма магнитных потоков в любом узле магнитной цепи равна нулю. При этом потоки, направленные к узлу, принимают положительными, а потоки, направленные от узла, – отрицательными. Значит, первый закон Кирхгофа можно сформулировать иначе: сумма магнитных потоков, подтекающих к узлу, равна сумме магнитных потоков, утекающих от узла:

$$\sum \Phi_{\text{п}} = \sum \Phi_{\text{у}}.$$

Одним из основных законов, используемых при расчете магнитной цепи, является *закон полного тока*. Он формулируется следующим образом: циркуляция вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  по замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I. \quad (6.3)$$

Положительное направление интегрирования  $d\vec{l}$  связано с положительным направлением тока  $I$  правилом правоходового винта. Если контур интегрирования будет пронизывать обмотку катушки с числом витков  $N$ , по которой проходит ток  $I$ , то  $\sum I = IN$ . Значит, выражение (6.3) можно представить в следующем виде:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = IN.$$

Таким образом, закон полного тока представляет собой *второй закон Кирхгофа*: алгебраическая сумма падений магнитного напряжения вдоль любого замкнутого контура равна алгебраической сумме МДС вдоль того же контура:

$$\sum U_{\text{м}} = \sum F \text{ или } \sum HI = \sum IN. \quad (6.4)$$

Перед тем как записать уравнения по законам Кирхгофа, следует указать направления МДС, произвольно выбрать положительные направления магнитных потоков в ветвях и направления обхода контуров.

Если направление магнитного потока на некотором участке совпадает с направлением обхода, то падение магнитного напряжения этого участка входит в левую часть уравнения (6.4) со знаком «+», если встречно ему, то со знаком «-». Аналогично, если МДС совпадает с направлением обхода, она входит в правую часть уравнения (6.4) со знаком «+», в противном случае – со знаком «-».

**Пример 6.1.** Составить систему уравнений по законам Кирхгофа для разветвленной магнитной цепи (см. рис. 6.1, б).

**Решение.** Укажем направления МДС  $I_1N_1$  и  $I_3N_3$ , используя правило правоходового винта. Произвольно выберем и укажем на схеме положительные направления магнитных потоков. Обход по контурам – по часовой стрелке.

По первому закону Кирхгофа необходимо составить одно уравнение (на одно меньше числа узлов), по второму закону Кирхгофа – два уравнения, чтобы общее число уравнений было равно числу ветвей. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0; \\ H_1l_1 + H_2l_2 = I_1N_1; \\ -H_2l_2 + H_3l_3 = I_3N_3. \end{cases}$$

### 6.3. Закон Ома для участка магнитной цепи

Пусть на участке магнитной цепи, не содержащем МДС, проходит магнитный поток  $\Phi$ . Напряженность магнитного поля

$$H = \frac{B}{\mu_a} = \frac{\Phi}{S\mu_a},$$

где  $S$  – площадь сечения магнитопровода;

$\mu_a$  – абсолютная магнитная проницаемость материала.

Магнитное напряжение на участке

$$U_m = Hl = \frac{\Phi l}{S\mu_a} = \Phi R_m, \quad (6.5)$$

где  $l$  – длина участка магнитопровода;

---

---

$$R_m = \frac{l}{S\mu_a} \text{ – магнитное сопротивление.}$$

С учетом уравнения (6.5) в общем случае можно записать выражение второго закона Кирхгофа:

$$\sum U_m = \sum \Phi R_m = \sum IN,$$

а также выразить закон Ома для участка магнитной цепи:

$$\Phi = \frac{U_m}{R_m} = \frac{U_m S \mu_a}{l}. \quad (6.6)$$

Вследствие того, что магнитное сопротивление  $R_m$  зависит от абсолютной магнитной проницаемости среды  $\mu_a$ , которая в свою очередь зависит от напряженности магнитного поля, непосредственно пользоваться выражением закона Ома для расчетов сложно. Однако уравнение (6.6) наглядно показывает, какие параметры влияют на магнитный поток и качественно характеризуют работу магнитной цепи. Очевидно, что расчет можно вести по закону Ома при  $\mu_a = \text{const}$ .

#### **6.4. Вебер-амперная характеристика и ее построение**

Под *вебер-амперной характеристикой* (ВБАХ) понимают зависимость магнитного потока по какому-либо участку магнитной цепи от падения магнитного напряжения на этом участке, т. е. от  $\Phi(U_m)$ .

Вебер-амперные характеристики также необходимы при расчетах и исследовании магнитных цепей, как и вольт-амперные характеристики (ВАХ) при расчетах и исследовании нелинейных электрических цепей. Однако ВБАХ в готовом виде не задаются, поэтому нужно уметь их построить на основе кривых намагничивания ферромагнитных материалов, входящих в магнитную цепь.

Пусть по участку магнитной цепи из ферромагнитного материала с воздушным зазором (рис. 6.3, а) проходит магнитный поток  $\Phi$ .

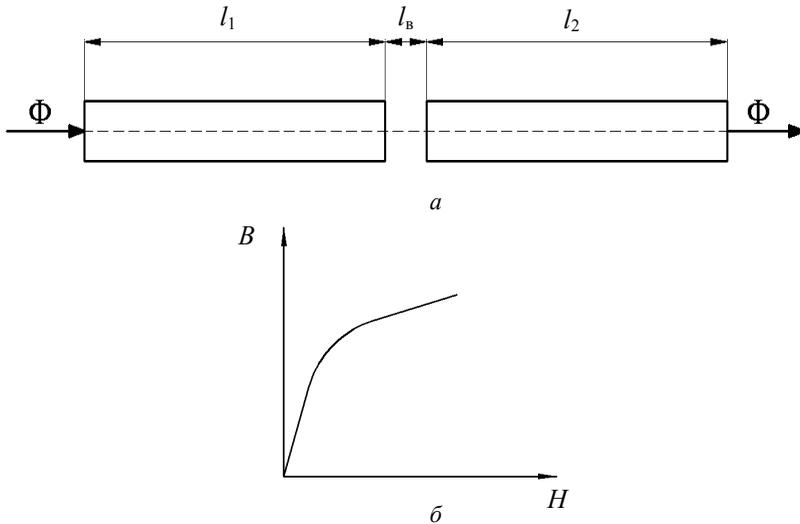


Рис. 6.3. Схема участка магнитной цепи (а) и кривая намагничивания ферромагнитного материала (б)

Площадь сечения магнитопровода  $S$ , длина участков магнитопровода  $l_1$  и  $l_2$ , воздушного зазора  $l_B$  обычно задаются. Если указан материал магнитопровода, кривую намагничивания находят в справочниках. В нашем случае зависимость  $B(H)$  приведена на рисунке 6.3, б. Требуется построить ВБАХ данного участка магнитной цепи. Допускаем, что магнитный поток вдоль всего участка одинаков (отсутствует рассеяние) и сечение магнитного потока в воздушном зазоре такое же, как и на участках  $l_1$  и  $l_2$  (отсутствует боковой распор силовых линий в зазоре). Чем больше воздушный зазор, тем менее справедливы оба допущения.

Для построения ВБАХ выполняют необходимые расчеты с целью получить значения магнитного потока  $\Phi$  и соответствующие значения падения магнитного напряжения  $U_M$ .

Благодаря принятым ранее допущениям на всей протяженности участка магнитная индукция будет одинаковой, т. е.  $B_1 = B_2 = B_B = \Phi/S = B$ .

Поэтому можно задаваться рядом значений магнитной индукции  $B$  и по кривой намагничивания определять соответствующий

ряд значений напряженности магнитного поля  $H$ . На участках ферромагнитного материала  $H_1 = H_2 = H$ , а в воздушном зазоре напряженность определяют по следующему выражению:

$$H_B = \frac{B}{\mu_0} = \frac{B}{4\pi \cdot 10^{-7}} \approx 0,8 \cdot 10^6 \cdot B, \quad (6.7)$$

где  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума.

Для каждого значения магнитной индукции  $B$  вычисляют магнитный поток  $\Phi = BS$  и падение магнитного напряжения  $U_M = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_B l_B$ . По результатам расчетов строят зависимость  $\Phi(U_M)$ .

### 6.5. Расчет неразветвленных магнитных цепей

Электрические и магнитные цепи подчиняются законам Кирхгофа. Аналогом тока в электрической цепи является магнитный поток в магнитной цепи, аналогом ЭДС – МДС, аналогом вольт-амперной характеристики – вебер-амперная характеристика.

Различают два типа задач по расчету неразветвленных магнитных цепей: определение МДС по заданному магнитному потоку и определение магнитного потока по заданной МДС.

Рассмотрим первый тип задачи на примере магнитной цепи (рис. 6.4).

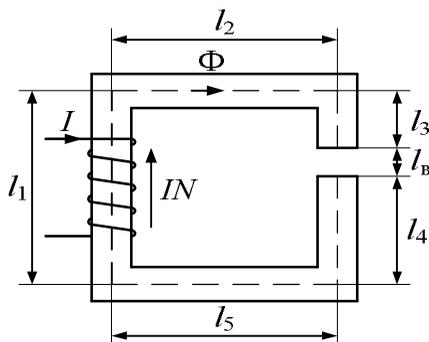


Рис. 6.4. Расчетная схема неразветвленной магнитной цепи:

$l_1 - l_5$  – длины средней линии участков магнитопровода;

$l_b$  – длина воздушного зазора

Обычно заданы конфигурация и геометрические размеры магнитопровода (длина участков и площадь сечений), кривые намагничивания ферромагнитных материалов и магнитный поток или магнитная индукция в каком-либо сечении. Требуется определить МДС либо входящие в МДС ток или число витков.

Исходя из постоянства магнитного потока вдоль всей цепи по заданному магнитному потоку и сечениям находят значения магнитной индукции на каждом участке:

$$B_k = \Phi/S_k,$$

$$\text{т. е. } B_1 = \Phi/S_1; B_2 = \Phi/S_2; B_3 = \Phi/S_3 = B_v = B_4; B_5 = \Phi/S_5.$$

По кривым намагничивания определяют напряженность магнитного поля  $H_k$  для участков из ферромагнитного материала. Напряженность поля в воздушном зазоре  $H_v$  рассчитывают по формуле (6.7).

Искомую МДС определяют по второму закону Кирхгофа для контура вдоль средней линии магнитопровода:

$$IN = \sum H_k l_k,$$

или

$$IN = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_v l_v + H_4 l_4 + H_5 l_5.$$

Второй тип задачи – определение магнитного потока по заданной МДС – принципиально сводится к многократному повторению расчетов по алгоритму первого типа задачи, построению зависимости  $\Phi(IN)$  и нахождению рабочей точки. Для этого задают значения магнитного потока  $\Phi$  и находят соответствующие значения  $IN$ , как в предыдущей задаче, и строят зависимость  $\Phi(IN)$ . По заданной МДС определяют магнитный поток.

Решение задач первого и второго типа значительно упрощается при рассмотрении неразветвленной однородной магнитной цепи. Однородная магнитная цепь содержит замкнутый ферромагнитный сердечник, имеющий по всей длине одинаковые поперечное сечение и материал.

При заданном значении магнитного потока  $\Phi$  и известной площади  $S$  поперечного сечения находят магнитную индукцию:

---

---

$$B = \frac{\Phi}{S}.$$

По кривой намагничивания ферромагнитного материала  $B(H)$  определяют напряженность  $H$ .

По второму закону Кирхгофа для магнитной цепи находят МДС:

$$IN = Hl,$$

где  $l$  – длина магнитопровода, подсчитанная по средней линии.

При решении задач второго типа, когда задана МДС, согласно второму закону Кирхгофа находят напряженность

$$H = \frac{IN}{l}.$$

По кривой намагничивания ферромагнитного материала  $B(H)$  определяют магнитную индукцию  $B$ .

Магнитный поток находят из выражения

$$\Phi = BS.$$

**Пример 6.2.** В сердечнике (рис. 6.1, *a*) в воздушном зазоре должна быть магнитная индукция  $B = 1$  Тл. Площадь сечения сердечника  $S = 25 \text{ см}^2$ , длина средней линии сердечника  $l_{\text{ср}} = 0,5$  м, длина воздушного зазора  $l_{\text{в}} = 0,5$  мм. Материал сердечника – литая сталь (кривые намагничивания приведены на рисунке 5.12). Определить ток в обмотке, имеющей 500 витков. Поток рассеяния  $\Phi_{\text{р}}$  пренебречь.

**Решение.** Согласно второму закону Кирхгофа для магнитной цепи, МДС катушки

$$IN = H_{\text{ст}} l_{\text{ср}} + H_{\text{в}} l_{\text{в}},$$

где  $H_{\text{ст}}$  – напряженность магнитного поля в стальном сердечнике;

$H_{\text{в}}$  – напряженность магнитного поля в воздушном зазоре.

В неразветвленной магнитной цепи во всех участках проходит один и тот же магнитный поток  $\Phi$ , площадь сечения воздушного зазора  $S_{\text{в}}$  и площадь сечения стального сердечника принимаем равными:  $S_{\text{в}} = S_{\text{ст}} = S$ .

Следовательно, магнитная индукция во всех сечениях магнитопровода одинаковая:  $B_{\text{в}} = B_{\text{ст}} = B = 1$  Тл.

Напряженность в стальном сердечнике находим по кривой намагничивания литой стали (см. рис. 5.12):

$$H_{ст} = 750 \text{ А/м.}$$

Напряженность в воздушном зазоре находим по уравнению (6.7):

$$H_b = \frac{B}{\mu_0} = 0,8 \cdot 10^6 \cdot B = 0,8 \cdot 10^6 \cdot 1 = 0,8 \cdot 10^6 \text{ А/м.}$$

Подставляем найденные значения напряженностей в уравнение второго закона Кирхгофа и находим МДС катушки:

$$IN = 750 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 375 + 4000 = 4375 \text{ А.}$$

Ток в катушке

$$I = \frac{IN}{N} = \frac{4375}{500} = 8,75 \text{ А.}$$

### 6.6. Расчет разветвленных магнитных цепей

Наиболее распространены разветвленные магнитные цепи, содержащие два узла. Рассмотрим для примера расчет разветвленной магнитной цепи (рис. 6.5) методом двух узлов.

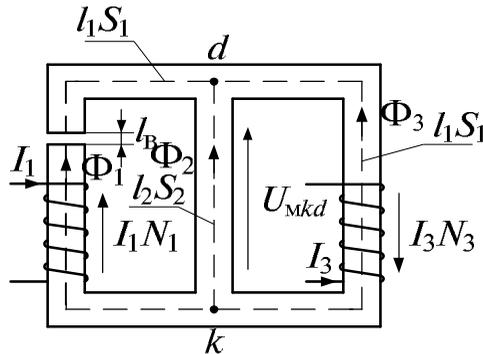


Рис. 6.5. Схема разветвленной магнитной цепи с двумя узлами

Заданы конфигурация магнитной цепи, геометрические размеры (длина каждой ветви сердечника  $l_1, l_2, l_3$ , их сечения  $S_1, S_2, S_3$ , длина воздушного зазора  $l_b$ ), значения МДС  $I_1 N_1$  и  $I_3 N_3$ , кривая намагничивания  $B(H)$ . Требуется определить магнитные потоки  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ .

В схеме (см. рис. 6.5) определяют направления МДС  $I_1N_1$  и  $I_3N_3$ , пользуясь правилом правоходового винта. Произвольно выбирают и указывают направления магнитных потоков  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  и магнитного напряжения между двумя узлами  $U_{mkd}$  (рекомендуется их направить к одному узлу).

Сущность метода заключается в нахождении такого магнитного напряжения  $U_{mkd}$ , при котором выполняется первый закон Кирхгофа:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0.$$

Для этого выражают напряжение  $U_{mkd}$  через параметры каждой из ветвей, используя второй закон Кирхгофа:

$$U_{mkd} = H_1l_1 + H_B l_B - I_1N_1; \quad (6.8)$$

$$U_{mkd} = H_2l_2; \quad (6.9)$$

$$U_{mkd} = H_3l_3 + I_3N_3. \quad (6.10)$$

В соответствии с методикой, изложенной в п. 6.4, выполняют расчеты для построения вебер-амперных характеристик ветвей, т. е. зависимостей  $\Phi_1(U_{mkd})$ ,  $\Phi_2(U_{mkd})$ ,  $\Phi_3(U_{mkd})$ . Для этого задают значения магнитной индукции  $B$  (положительные и отрицательные) из кривой намагничивания и находят соответствующие значения напряженности  $H$  для ферромагнитных участков цепи. Напряженность в воздушном зазоре  $H_B$  определяют по формуле (6.7). Для каждого значения  $B$  находят магнитный поток  $\Phi$  по уравнению (6.1) и магнитное напряжение  $U_{mkd}$  по выражениям (6.8)–(6.10).

Расчеты удобно свести в таблицу.

По результатам расчетов строят в одной системе координат зависимости  $\Phi_1(U_{mkd})$ ,  $\Phi_2(U_{mkd})$  и  $\Phi_3(U_{mkd})$  (рис. 6.6).

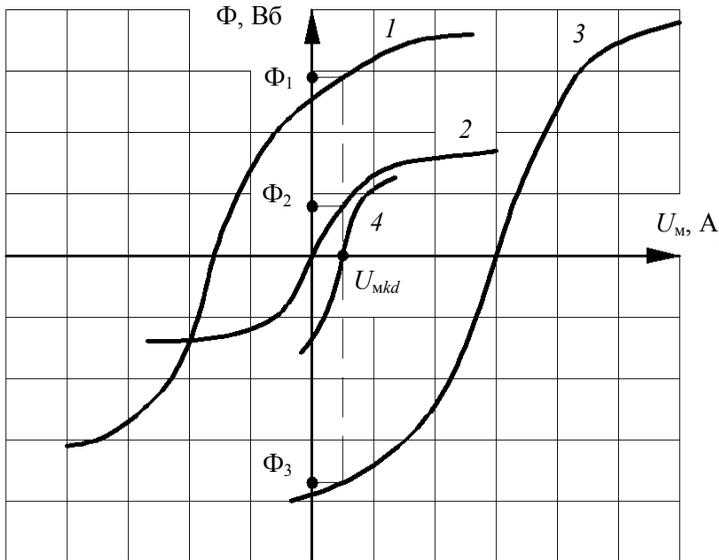


Рис. 6.6. Примерный вид расчетных вебер-амперных характеристик ветвей:

$$1 - \Phi_1(U_{Mkd}); 2 - \Phi_2(U_{Mkd}); 3 - \Phi_3(U_{Mkd}); 4 - \Sigma\Phi(U_{Mkd})$$

Поскольку вебер-амперные характеристики ветвей представляют собой функции одного и того же напряжения между двумя узлами для трех ветвей, то, задаваясь этим напряжением, можно суммировать магнитные потоки разных ветвей. Для облегчения поиска напряжения  $U_{Mkd}$ , при котором  $\Sigma\Phi = 0$ , можно построить зависимость  $(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3)(U_{Mkd})$ . Задаются несколькими значениями  $U_{Mkd}$ , при которых наиболее вероятно получить сумму, равную нулю, и строят зависимость  $\Sigma\Phi(U_{Mkd})$  (см. рис. 6.6). Искомое значение  $U_{Mkd}$  будет находиться в точке пересечения этой зависимости с горизонтальной осью.

Пользуясь найденным значением  $U_{Mkd}$ , определяют магнитные потоки в каждой ветви, затем осуществляют проверку решения по первому закону Кирхгофа.



## Вопросы и задачи для самоконтроля

1. Дайте определение магнитной цепи.
2. Запишите, чему равна магнитодвижущая (намагничивающая) сила.
3. Определите, чему равно падение магнитного напряжения на участке магнитной цепи.
4. Сформулируйте и запишите первый и второй законы Кирхгофа для магнитной цепи.
5. Запишите выражения закона Ома и магнитного сопротивления участка магнитной цепи.
6. Изложите последовательность расчета МДС неразветвленной однородной магнитной цепи при заданном магнитном потоке.
7. Изложите последовательность расчета магнитного потока неразветвленной однородной магнитной цепи при заданном значении МДС.
8. Катушка с сердечником имеет  $N = 200$  витков. Сердечник кольцевой формы из литой стали. Площадь сечения сердечника  $S = 12,5 \text{ см}^2$ , радиус средней линии сердечника  $R = 10 \text{ см}$ . Кривая намагничивания литой стали приведена на рисунке 5.12. Определите, какой величины должен быть ток в обмотке, чтобы получить магнитный поток в сердечнике  $\Phi = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}$ . Ответ:  $I \approx 4,4 \text{ А}$ .
9. Определите магнитный поток в кольцевом сердечнике из электротехнической стали 1512, если длина средней линии сердечника  $l = 80 \text{ см}$ , сечение сердечника  $S = 20 \text{ см}^2$ , в катушке с числом витков  $N = 200$  ток  $I = 2 \text{ А}$ . Кривая намагничивания электротехнической стали приведена на рисунке 5.12. Ответ:  $\Phi \approx 2,16 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}$ .

## 7. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

---

### 7.1. Явление и закон электромагнитной индукции

Электромагнитная индукция представляет собой одно из важнейших явлений, наблюдаемых в магнитном поле. Она была обнаружена в 1831 г. английским физиком Майклом Фарадеем. Суть явления в том, что при изменении магнитного потока, пронизывающего какой-либо контур (обмотку), независимо от того, чем вызвано изменение потока, в контуре (обмотке) наводится сила  $e$ .

*Закон электромагнитной индукции* устанавливает количественное выражение для наведенной (индуктированной) ЭДС.

Электродвижущая сила, наведенная (индуктированная) в контуре, равна скорости изменения потокосцепления контура  $\Psi$ , взятой с отрицательным знаком:

$$e = -\frac{d\Psi}{dt}. \quad (7.1)$$

Потокосцепление контура  $\Psi$  равно алгебраической сумме потоков, пронизывающих отдельные витки обмотки:

$$\Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots + \Phi_n.$$

Если все витки обмотки  $N$  пронизываются одним и тем же потоком  $\Phi$ , то

$$\Psi = N\Phi$$

и ЭДС, наведенная в катушке,

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt}. \quad (7.2)$$

### 7.2. Правило Ленца

В 1833 г. профессор Петербургского университета Э.Х. Ленц установил общее правило для определения направления индукти-

рованного тока и электромагнитных сил, возникающих в результате взаимодействия магнитного поля с индуцированным током.

Правило Ленца формулируется следующим образом: *при любом изменении магнитного потока, сцепляющегося с каким-либо проводящим контуром, в контуре возникают явления электрического и механического характера, препятствующие изменению магнитного потока.*

Этому правилу соответствует знак « $\leftarrow$ » в формулах (7.1) и (7.2), выражающих закон электромагнитной индукции, если принять положительными направления магнитного потока и индуцированной в контуре ЭДС, удовлетворяющие правилу правого винта (рис. 7.1).

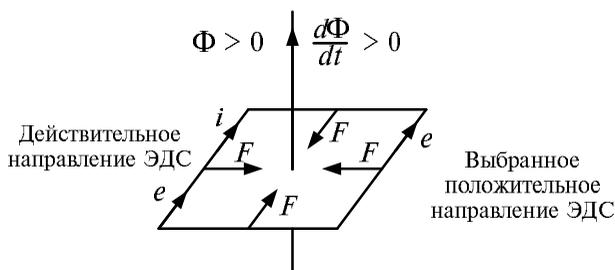


Рис. 7.1. Иллюстрация правила Ленца

Предположим, положительный магнитный поток  $\Phi$ , сцепленный с контуром, увеличивается. Приращение магнитного потока  $d\Phi$  и скорость его изменения  $\frac{d\Phi}{dt}$  положительны  $\left( d\Phi > 0, \frac{d\Phi}{dt} > 0 \right)$ .

Согласно закону электромагнитной индукции (см. формулу (7.2)), наведенная в контуре ЭДС отрицательна ( $e < 0$ ), т. е. направлена против выбранного положительного направления (см. рис. 7.1).

Наведенная в контуре ЭДС стремится вызвать электрический ток  $i$ , направление которого совпадает с направлением ЭДС. Электрический ток  $i$  создает вторичный магнитный поток, который, согласно правилу буравчика, действует против основного потока  $\Phi$ , т. е. препятствует его увеличению.

Одновременно в контуре возникают электромагнитные силы  $F$ , стягивающие контур (направление силы определяется правилом левой руки). Тенденция к уменьшению поверхности, ограниченной контуром, направлена на уменьшение основного потока  $\Phi$ .

При уменьшении основного магнитного потока  $\left( d\Phi < 0, \frac{d\Phi}{dt} < 0 \right)$

наведенная ЭДС положительна, т. е. совпадает с выбранным положительным направлением. Наведенный в контуре ток  $i$  создаст вторичный магнитный поток, совпадающий по направлению с основным потоком, т. е. будет препятствовать уменьшению основного магнитного потока. Возникающие ЭДС будут стремиться расширить контур с током, т. е. увеличить магнитный поток, сцепленный с ним.

### 7.3. ЭДС в проводнике, движущемся в магнитном поле. Правило правой руки

В проводнике, движущемся в магнитном поле так, что он пересекает линии магнитной индукции, наводится ЭДС. Это явление – разновидность электромагнитной индукции.

Рассмотрим отрезок АБ прямолинейного проводника, который движется, пересекая под прямым углом линии магнитной индукции равномерного поля с магнитной индукцией  $B$  (рис. 7.2, а).

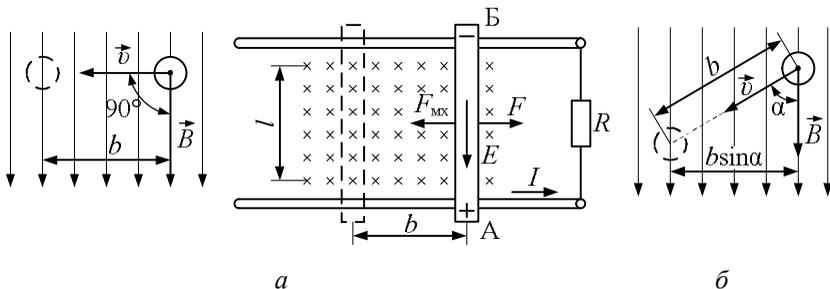


Рис. 7.2. Наведение ЭДС в проводнике, движущемся в магнитном поле:  
 а – проводник пересекает линии магнитной индукции под углом  $\alpha = 90^\circ$ ;  
 б – проводник пересекает линии магнитной индукции под углом  $\alpha < 90^\circ$

---

На рисунке 7.2, а проводник АБ перемещается в направлении механической силы  $F_{\text{мх}}$  по металлическим шинам, соединенным между собой через сопротивление  $R$ .

Проводник АБ, отрезки шин и сопротивление  $R$  образуют замкнутый проводящий контур. При перемещении проводника на расстояние  $b$  с постоянной скоростью  $v$  магнитный поток, сцепленный с этим контуром, увеличивается за счет увеличения площади поверхности, ограниченной контуром.

Приращение магнитного потока

$$\Delta\Phi = B\Delta S = Bbl,$$

где  $l$  – длина части проводника АБ, находящейся в магнитном поле.

Абсолютная величина ЭДС в контуре

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{Bbl}{\Delta t},$$

где  $\Delta t$  – время, в течение которого проводник АБ переместился на расстояние  $b$ ;

$$\frac{b}{\Delta t} = v \text{ — скорость движения проводника, поэтому}$$

$$E = Blv.$$

Если проводник будет перемещаться под углом  $\alpha < 90^\circ$  к направлению магнитной индукции поля (см. рис. 7.2, б), то приращение магнитного потока за время  $\Delta t$  при той же скорости  $v$  будет

$$\Delta\Phi = Blb \sin \alpha,$$

ЭДС в контуре

$$E = Blv \sin \alpha.$$

При  $\alpha = 90^\circ$  определяется наибольшее значение ЭДС при данных величинах  $B$ ,  $v$ ,  $l$ . При  $\alpha = 0$  (проводник движется вдоль линий магнитной индукции) ЭДС равна нулю.

Проводник АБ входит в замкнутый проводящий контур. Под действием наведенной ЭДС в контуре установится перемещение электрических зарядов, т. е. появится электрический ток.

Для определения направления наведенной ЭДС применяют правило правой руки: *если расположить правую руку так, чтобы линии магнитной индукции входили в ладонь, а отогнутый большой палец показывал направление движения проводника, то вытянутые четыре пальца покажут направление наведенной в проводнике ЭДС*. Электрический ток в контуре совпадает по направлению с ЭДС.

В соответствии с этим правилом на рисунке 7.2, а показано направление наведенной ЭДС  $E$  и тока  $I$ .

Все изложенное о возникновении индуктированной ЭДС в проводнике справедливо и тогда, когда проводник остается неподвижным, а движется система магнитных полюсов так, что линии магнитной индукции пересекают проводник. В этом случае, определяя направление ЭДС по правилу правой руки, нужно считать проводник движущимся в направлении, противоположном направлению движения магнитных полюсов.

#### **7.4. Взаимное преобразование механической и электрической энергий**

Электромеханическое действие магнитного поля и электромагнитная индукция используются для преобразования механической энергии в электрическую и обратно. Устройства, при помощи которых эти преобразования осуществляются, называются *электрическими машинами*. Машина для преобразования механической энергии в электрическую называется *генератором*, а для обратного преобразования – *двигателем*.

Рассмотрим принцип преобразования механической энергии в электрическую.

Проводник АБ (см. рис. 7.2, а) движется с постоянной скоростью за счет механической энергии какого-либо двигателя – источника механической энергии.

Механическая мощность движения проводника

$$P_{\text{мх}} = F_{\text{мх}} v, \quad (7.3)$$

где  $F_{\text{мх}}$  – сила, действующая на проводник со стороны двигателя.

---

---

Благодаря электромагнитной индукции в проводнике возникают ЭДС и ток

$$I = \frac{E}{(R_{\text{вт}} + R)},$$

где  $R_{\text{вт}}$  – сопротивление проводника АБ (внутреннее сопротивление источника электрической энергии);

$R$  – сопротивление внешней части цепи, включая сопротивление приемника и части шин, входящей в контур.

В данном случае проводник АБ является источником ЭДС, электрическая мощность которого

$$P = EI.$$

С появлением тока в проводнике АБ возникает ЭДС  $F$ , действующая в направлении, перпендикулярном направлению тока. Применяя правило левой руки, можно убедиться в том, что ЭДС  $F$  направлена против силы  $F_{\text{мх}}$ . Следовательно, внешняя сила  $F_{\text{мх}}$  в данном случае движущая, а  $F$  – тормозная.

При постоянной скорости  $v$  (установившееся движение) движущая и тормозная силы равны:

$$F_{\text{мх}} = F = BIl.$$

Подставив выражение силы в формулу (7.3), получим

$$P_{\text{мх}} = BIlv.$$

Поскольку

$$Blv = E,$$

то

$$P_{\text{мх}} = EI = P. \quad (7.4)$$

Следовательно, механическая мощность двигателя равна электрической мощности источника.

Выражение (7.4) показывает, что при движении проводника в магнитном поле в направлении механической силы происходит полное преобразование механической энергии в электрическую.

Напряжение на концах проводника  $U_{\text{АБ}}$  является одновременно напряжением на внешней части цепи, которое меньше ЭДС на величину внутреннего падения напряжения:

$$U_{AB} = E - IR_{вт}.$$

Рассмотрим принцип преобразования электрической энергии в механическую.

На рисунке 7.3 представлена электрическая цепь с тем же проводником АБ, как и на рисунке 7.2, но вместо приемника электрической энергии  $R$  в цепь входит источник электрической энергии с ЭДС  $E_0$ .

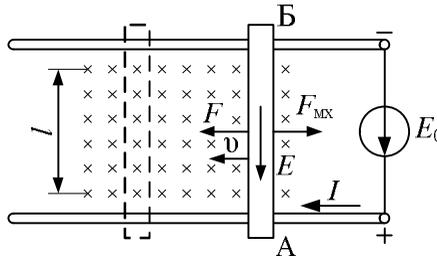


Рис. 7.3. Перемещение проводника в магнитном поле под действием электромагнитной силы  $F$

Под действием ЭДС  $E_0$  в замкнутом проводящем контуре возникнет электрический ток  $I$ , совпадающий по направлению с ЭДС  $E_0$ . На проводник АБ, по которому протекает ток  $I$ , в магнитном поле будет действовать электромагнитная сила  $F = BI l$ , направление которой определяется по правилу левой руки. Проводник АБ начнет перемещаться по металлическим шинам в направлении силы  $F$ . Сила  $F$  становится движущей. Противодействие ей оказывает механическая сила  $F_{мх}$  (например, сила трения).

Потокоцепление замкнутого проводящего контура будет изменяться, и в соответствии с законом электромагнитной индукции в проводнике АБ возникнет индуцированная ЭДС  $E = B l v$ . Ее направление определяют по правилу правой руки и, как видно на рисунке 7.3, наведенная ЭДС  $E$  противоположна направлению тока  $I$ .

Встречное направление ЭДС и тока является признаком потребления электрической энергии в данном устройстве и преобразования ее в другой вид энергии.

---

Согласно второму закону Кирхгофа для проводящего контура цепи, представленной на рисунке 7.3, имеем

$$E_0 - E = IR_{\text{вт}}, \quad (7.5)$$

где  $R_{\text{вт}}$  – сопротивление проводника АБ; сопротивлениями металлических шин и источника энергии с ЭДС  $E_0$  пренебрегаем.

Мощность источника электрической энергии с ЭДС  $E_0$

$$P = E_0 I. \quad (7.6)$$

Подставив в выражение (7.6) значение  $E_0$  из уравнения (7.5), получим

$$P = (E + IR_{\text{вт}})I = EI + I^2 R_{\text{вт}}.$$

Учитывая, что  $E = Blv$ , а  $F = BI$ , запишем

$$P = BlvI + I^2 R_{\text{вт}} = Fv + I^2 R_{\text{вт}}. \quad (7.7)$$

Первое слагаемое в этой сумме определяет механическую мощность движущегося проводника, а второе – мощность тепловых потерь в проводнике АБ в соответствии с законом Джоуля – Ленца.

Уравнение (7.7) подтверждает, что в механическую энергию преобразуется часть электрической энергии источника.

## 7.5. ЭДС самоиндукции и взаимной индукции

При изменении собственного потокосцепления в контуре или катушке наводится ЭДС самоиндукции  $e_L$ , а при изменении взаимного потокосцепления – ЭДС взаимной индукции.

Изменение собственного потокосцепления обычно является следствием изменения собственного тока катушки:

$$e_L = -\frac{d\Psi_L}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt},$$

или

$$e_L = -L \frac{di}{dt}. \quad (7.8)$$

ЭДС самоиндукции пропорциональна скорости изменения тока  $\frac{di}{dt}$ . Она противодействует изменению тока, т. е. при увеличении тока препятствует его росту, а при уменьшении задерживает его падение (правило Ленца).

Если изменение тока в катушке является следствием изменения приложенного к ней напряжения, то ЭДС самоиндукции направлена против приложенного напряжения, когда ток растет, и совпадает по направлению с напряжением, когда ток уменьшается.

Чем быстрее изменяется ток, тем больше противодействие его росту или падению. Однако это противодействие зависит не только от скорости изменения тока, но и от конструкции катушки, что в формуле (7.8) выражается множителем  $L$ , т. е. индуктивностью катушки.

Для системы магнитно-связанных катушек (см. рис. 5.6) ЭДС взаимной индукции

$$e_{2м} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt}; \quad e_{1м} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt}.$$

Изменение взаимного потокоцепления может быть следствием изменения тока в одной из катушек или изменения коэффициента связи. Предположим, ток  $i_1$  изменяется в первой катушке. ЭДС взаимной индукции  $e_{2м}$  во второй катушке пропорциональна скорости изменения этого тока:

$$e_{2м} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}. \quad (7.9)$$

Аналогично при изменении тока  $i_2$  ЭДС взаимной индукции в первой катушке

$$e_{1м} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M \frac{di_2}{dt}. \quad (7.10)$$

В том и в другом случае коэффициентом пропорциональности является взаимная индуктивность системы  $M$ .

Правило Ленца в применении к такой системе указывает на то, что изменение тока в одной катушке встречает противодействие со стороны другой катушки.

---

Выражение (7.8) показывает, что ЭДС самоиндукции появляется в контуре или катушке при изменении собственного тока контура.

Выражения (7.9) и (7.10) показывают, что ЭДС взаимодукиции появляется в контуре при изменении тока в соседнем контуре.

## 7.6. Принцип действия трансформатора

Наглядный пример практического использования явления взаимодукиции – работа трансформатора напряжения. Трансформатор – статический электромагнитный аппарат для изменения значения напряжения электрического тока.

Принципиальная схема трансформатора напряжения (рис. 7.4) имеет магнитопровод из электротехнической стали и две обмотки на магнитопроводе: первичную с числом витков  $N_1$  и вторичную с числом витков  $N_2$ . Обмотки выполнены из медного провода.

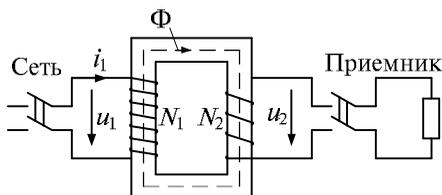


Рис. 7.4. Принципиальная схема трансформатора напряжения

Первичной обмоткой трансформатор включается в сеть переменного напряжения  $u_1$ , и в ней возникает переменный ток  $i_1$ . К вторичной обмотке подключается приемник электрической энергии.

Рассмотрим трансформатор с разомкнутой цепью вторичной обмотки, т. е. в режиме холостого хода.

При переменном токе в первичной обмотке создается переменный магнитный поток  $\Phi$ , который замыкается по стальному сердечнику и образует потокосцепление с обеими обмотками. Таким

образом, в трансформаторе обмотки электрически между собой не связаны, а связаны переменным магнитным потоком.

В обеих обмотках наводится ЭДС:

$$e_1 = -N_1 \frac{d\Phi}{dt}; \quad e_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}.$$

Отношение ЭДС

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2} = n.$$

Отношение количества витков обмоток трансформатора называется *коэффициентом трансформации*.

Отношение ЭДС при холостом ходе можно заменить отношением напряжений на зажимах обмоток, учитывая, что  $u_2 = e_2$  и  $u_1 \approx e_1$  ( $u_1 > e_1$  на величину падения напряжения в обмотке, которое при холостом ходе мало). Следовательно,

$$u_2 = u_1 \frac{N_2}{N_1}.$$

Таким образом, при  $N_2 > N_1$  ( $u_2 > u_1$ ) трансформатор повышает, а при  $N_2 < N_1$  ( $u_2 < u_1$ ) понижает напряжение.

Если к вторичной обмотке подключить приемник энергии, то в ее цепи возникает ток  $i_2$ , и в приемник будет поступать электрическая энергия из сети через трансформатор. При этом передача энергии из первичной обмотки во вторичную осуществляется посредством магнитного поля.

### 7.7. Вихревые токи

При протекании переменного тока по обмотке катушки возникает переменный магнитный поток, под действием которого в результате электромагнитной индукции будет наводиться ЭДС во всех контурах, пронизываемых магнитным потоком, а следовательно, и в стальном сердечнике. В результате возникают токи, которые замыкаются по сердечнику (рис. 7.5, а), их называют *вихревыми* или *токами Фуко*.

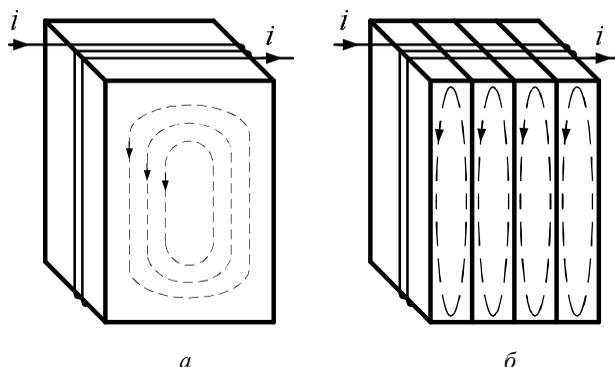


Рис. 7.5. Схематическое изображение прохождения вихревых токов: *а* – в сплошном сердечнике; *б* – в изолированных листах сердечника

Согласно закону Джоуля – Ленца, вихревые токи вызывают нагрев сердечника, т. е. имеет место потеря электрической энергии. Кроме того, токи Фуко создают свой магнитный поток, который согласно правилу Ленца будет направлен против основного магнитного потока, вызвавшего вихревые токи, т. е. оказывает размагничивающее действие.

Для уменьшения потерь энергии от вихревых токов и снижения размагничивающего действия магнитопроводы изготавливают из тонких листов стали, изолированных друг от друга лаком (рис. 7.5, б). Уменьшение токов Фуко в этом случае происходит за счет повышения электрического сопротивления, поскольку токи замыкаются в тонких листах по узким вытянутым путям.

Плоскость листов должна быть параллельна направлению магнитного потока, чтобы не увеличивалось магнитное сопротивление.

Для различных частот существуют свои оптимальные толщины листов. В частности, при промышленной частоте 50 Гц применяют листы толщиной 0,35–0,5 мм, при частотах порядка тысяч герц – листы толщиной 0,02–0,05 мм, а при более высоких частотах толщина листов доходит до 0,005 мм.

С целью повысить электрическое сопротивление при производстве электротехнической стали добавляют до 4,8 % кремния.

При высоких частотах (30–50 МГц) применяют сердечники, выполненные из магнитодиэлектриков или ферритов, которые обладают большим удельным электрическим сопротивлением.

На практике вихревые токи используются для нагревания металлов (плавление стали, нагрев под закалку и для других целей).

### 7.8. Энергия магнитного поля. Плотность энергии магнитного поля

Рассмотрим энергию уединенной индуктивной катушки. Пусть катушка с сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$  подключена к источнику энергии с ЭДС  $e$ . Тогда по второму закону Кирхгофа имеем

$$e = Ri + \frac{d\Psi}{dt},$$

где  $\Psi$  – потокосцепление индуктивной катушки;

$\frac{d\Psi}{dt}$  – падение напряжения, уравновешивающее ЭДС самоиндукции.

Работу источника энергии за время  $dt$  определим, умножив уравнение второго закона Кирхгофа на  $idt$ :

$$eidt = ri^2dt + id\Psi.$$

Первое слагаемое правой части равенства есть энергия, теряемая в виде теплоты в активном сопротивлении  $R$ , второе слагаемое есть энергия, создающая магнитное поле катушки, обозначим ее  $dW_M$ :

$$dW_M = id\Psi.$$

Полная энергия, запасенная в магнитном поле катушки, при изменении потокосцепления от 0 до  $\Psi$

$$W_M = \int_0^{\Psi} id\Psi.$$

Для катушек с неферромагнитным сердечником  $\Psi = Li$  и  $d\Psi = Ldi$ , поэтому

---

---

$$W_m = L \int_0^i i di = \frac{Li^2}{2},$$

или

$$W_m = \frac{\Psi i}{2}.$$

Объемную плотность энергии магнитного поля определим на примере катушки с кольцевым сердечником (см. п. 5.9), у которой магнитное поле в сердечнике можно считать равномерным:

$$\Psi = BSN; \quad i = \frac{Hl}{N},$$

где  $l$  – средняя длина сердечника.

Тогда

$$W_m = \frac{\Psi i}{2} = \frac{BSN}{2N} Hl = \frac{BHV}{2},$$

где  $V = Sl$  – объем сердечника.

Энергия магнитного поля в единице объема

$$\frac{W_m}{V} = \frac{BH}{2}.$$

Здесь энергия выражена через характеристики магнитного поля, что свидетельствует о ее принадлежности к магнитному полю.



### Вопросы и задачи для самоконтроля

1. Расскажите, в чем суть электромагнитной индукции.
2. Запишите, чему равна ЭДС, индуцированная в контуре (катушке).
3. Сформулируйте правило Ленца.
4. Запишите, чему равна ЭДС, индуцированная в проводнике, пересекающем магнитное поле.
5. Сформулируйте правило правой руки.
6. Запишите, чему равна электромагнитная сила, действующая на проводник с током в магнитном поле.

7. Дайте определение ЭДС самоиндукции и запишите, чему она равна.

8. Расскажите, как наводится ЭДС взаимной индукции. Запишите, чему она равна.

9. Объясните принцип действия трансформатора.

10. Расскажите, как возникают вихревые токи, как добиваются снижения их вредного действия.

11. Запишите, чему равна энергия магнитного поля и объемная плотность энергии магнитного поля.

12. В равномерном магнитном поле, где  $B = 1,8$  Тл, перпендикулярно линиям магнитной индукции движется прямолинейный проводник длиной  $0,5$  м со скоростью  $20$  м/с. Концы проводника присоединены к резистору с сопротивлением  $R = 1,6$  Ом так, что образуется замкнутый контур. Сопротивление движущегося проводника и соединительных проводов составляет  $R_0 = 0,2$  Ом. Определите ток в цепи и механическую мощность, необходимую для преодоления реакции магнитного поля. Ответ:  $10$  А;  $180$  Вт.

13. Индуктивность соленоида (цилиндрической катушки) при длине  $l = 0,1$  м и площади поперечного сечения  $S = 2$  см<sup>2</sup> равна  $4$  МГн. Определите силу тока в обмотке, при которой объемная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида равна  $1$  Дж/м<sup>3</sup>. Ответ:  $0,1$  А.

14. Катушка с сопротивлением  $R = 10$  Ом и индуктивностью  $L = 0,1$  Гн включена на постоянное напряжение  $U = 100$  В. Каким количеством энергии магнитного поля обладает катушка и какова мощность тепловых потерь? Ответ:  $5$  Дж;  $1000$  Вт.

15. Катушка с индуктивностью  $L = 0,2$  Гн подключается к источнику постоянного напряжения  $U = 20$  В. Определите скорость нарастания тока в момент включения катушки. Ответ:  $100$  А/с.

16. На кольцевой сердечник намотаны две обмотки. При изменении тока в первой обмотке со скоростью  $200$  А/с во второй обмотке наводится ЭДС  $e_2 = 30$  В. Определите взаимную индуктивность обмоток. Ответ:  $0,15$  Гн.

17. Магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий катушку с числом витков  $N = 15$ , за время  $t = 0,01$  с изменялся с постоянной скоро-

---

стью от 0 до 0,1 Вб. Определите модуль ЭДС в наведенной катушке. Ответ: 150 В.

18. Определите скорость  $v$ , с которой нужно перемещать проводник в равномерном магнитном поле, перпендикулярно линиям магнитной индукции, чтобы в нем наводилась ЭДС  $E = 18$  В, если магнитная индукция поля  $B = 1,5$  Тл, длина проводника  $l = 60$  см. Ответ: 20 м/с.

## 8. СИНУСОИДАЛЬНЫЕ ЭДС И ТОК

---

### 8.1. Общие положения о цепях синусоидального тока

Основная роль в прикладной электротехнике принадлежит переменному току, главное преимущество которого заключается в возможности с малыми потерями передавать электроэнергию, трансформировать (преобразовывать) напряжение, получая высокое напряжение для передачи электрической энергии по длинным линиям и сравнительно низкое – для ее распределения потребителям. Кроме того, однофазные и трехфазные генераторы и двигатели синусоидального тока имеют более простое устройство и, следовательно, более просты в эксплуатации и надежны.

На практике все источники энергии переменного тока (генераторы электростанций) создают ЭДС, изменяющуюся во времени по синусоидальному закону. Электрические цепи, в которых действуют синусоидальные источники ЭДС, называются электрическими цепями синусоидального тока, напряжения. Такие понятия, как схема цепи, ветвь, узел, контур, способы соединения участков цепи, которые были даны ранее для цепей постоянного тока, остаются равнозначными и для цепей синусоидального тока.

Электродвижущие силы, напряжения и токи, изменяющиеся во времени, называют *переменными*. Значение тока в любой данный момент времени называют *мгновенным*. Аналогичное определение имеют и мгновенные значения ЭДС, напряжения, магнитного потока, магнитодвижущей силы и т. д. Мгновенные значения обозначаются строчными буквами:  $i$ ,  $u$ ,  $e$ . В дальнейшем будем рассматривать все понятия на примере тока.

Ток определен, если известна его зависимость от времени  $i(t)$  и указано положительное направление. Ток, мгновенные значения которого повторяются через равные промежутки времени в той же последовательности, называют *периодическим*. Наименьший про-

---

---

межутков времени, через который эти повторения наблюдаются, называют *периодом*  $T$ . Для периодического тока

$$i = F(t) = F(t + T).$$

Величину, обратную периоду, называют *частотой*:

$$f = \frac{1}{T}.$$

Частота равна 1 Гц, если период равен 1 с.

Форма кривой периодически изменяющегося переменного тока может быть любой (синусоидальной, пилообразной, прямоугольной и т. д.). Наиболее рациональный эксплуатационный режим работы электрических установок переменного тока обеспечивается при питании их от источников синусоидального тока. Поэтому преобладающим видом периодического процесса в электрических цепях является *синусоидальный режим*, характеризующийся тем, что все напряжения и токи являются синусоидальными функциями одинаковой частоты. При синусоидальном токе напряжения на всех элементах линейной электрической цепи также оказываются синусоидальными функциями времени.

Как известно из курса математического анализа, синусоида является простейшей периодической функцией, а другие несинусоидальные периодические функции могут быть представлены бесконечным рядом синусоид кратных частот. Это обуславливает первоочередную необходимость изучения цепей синусоидального тока.

## **8.2. Величины, характеризующие синусоидальный ток. Генерирование синусоидальной ЭДС**

Периодические ЭДС, напряжения и токи, являющиеся синусоидальными функциями времени, аналитически представляют в виде следующих уравнений:

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e); \quad u = U_m \sin(\omega t + \psi_u); \quad i = I_m \sin(\omega t + \psi_i). \quad (8.1)$$

Величины  $e$ ,  $u$ ,  $i$  называют *мгновенными*, а  $E_m$ ,  $U_m$ ,  $I_m$  – *амплитудными* (максимальными) значениями ЭДС, напряжения и

тока. Аргумент синуса ( $\omega t + \psi$ ) называют *фазой*. Величину  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ , определяющую скорость изменения аргумента угла, называют *угловой частотой*, а  $\psi_e$ ,  $\psi_u$ ,  $\psi_i$  – *начальной фазой* соответственно ЭДС, напряжения и тока.

На рисунке 8.1 показаны графики изменения во времени синусоидальных напряжения и тока с одним и тем же периодом. Их еще называют *временными диаграммами*. По оси абсцисс можно откладывать или время  $t$ , или пропорциональную ему угловую величину  $\omega t$ . Соответственно периодом будет являться  $T$  или  $2\pi$ .

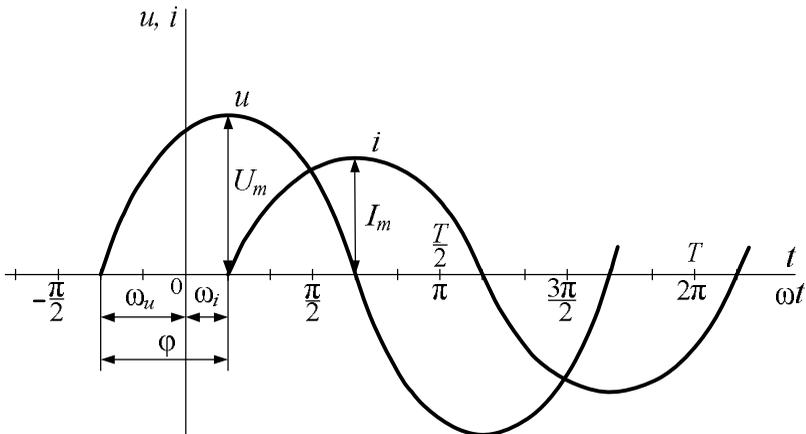


Рис. 8.1. Графики синусоидальных функций  $u(t)$  и  $i(t)$

Следует обратить внимание, что начальная фаза  $\psi_u$  или  $\psi_i$ , определяемая смещением синусоиды относительно начала координат, измеряется абсциссой точки перехода отрицательной полу волны синусоиды в положительную и является величиной алгебраической. Угол  $\psi$  положителен и отсчитывается вправо к точке  $t = 0$ , когда синусоидальная функция смещена влево относительно

---

---

начала координат. Таким образом, для представленных на рисунке 8.1 функций  $\psi_u > 0$ , а  $\psi_i < 0$ .

Если начала синусоид напряжения и токов, изменяющихся с одинаковой частотой, в какой-то цепи не совпадают, то говорят, что они сдвинуты по фазе относительно друг друга.

*Угол сдвига фаз* измеряется разностью начальных фаз напряжения и тока, т. е.

$$\varphi = \psi_u - \psi_i.$$

Таким образом, основными величинами, характеризующими синусоидально изменяющуюся величину (ЭДС, напряжение и ток), являются амплитуда  $E_m$ ,  $U_m$  или  $I_m$ , угловая частота  $\omega$  и начальная фаза  $\psi$ .

К синусоидальным функциям в общем случае причисляют и косинусоидальные функции. Поскольку косинусоида может рассматриваться как синусоида с начальной фазой  $\psi = \frac{\pi}{2}$ , ее можно представить в синусоидальной форме:

$$u = U_m \cos(\omega t + \psi_u) = U_m \sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right).$$

В зависимости от требуемой частоты источниками синусоидальной ЭДС являются генераторы разных типов: вращающиеся электрические машины (для промышленных частот); ионные и полупроводниковые преобразователи постоянного тока в переменный (инверторы) или ламповые генераторы (для промышленных и повышенных частот); квантовые генераторы (для высоких частот).

Наиболее распространенным промышленным способом получения синусоидальной ЭДС является применение электромагнитных машин – синхронных генераторов, приводимых во вращение гидравлическими, тепловыми и другими двигателями.

*Синхронный генератор* (рис. 8.2) состоит из неподвижной части – *статора 1* и вращающейся части – *ротора 2*.

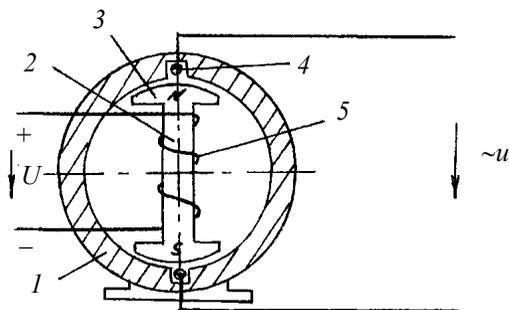


Рис. 8.2. Упрощенный схематичный разрез синхронного генератора

Магнитная цепь машины изготавливается из электротехнической стали: статор и полюсные наконечники 3 ротора – из листовой стали; остальная часть ротора – из сплошного стального массива. В пазах статора размещена *рабочая обмотка 4*, а на роторе – *обмотка возбуждения 5*, которая через кольца и щетки питается от источника постоянного тока.

Таким образом, ротор представляет собой электромагнит с явно выраженными полюсами. При вращении ротора в генераторе получается вращающееся магнитное поле, под действием которого в каждом проводнике рабочей обмотки (согласно закону Фарадея) наводится ЭДС

$$e = Blv,$$

где  $B$  – магнитная индукция поля под проводником обмотки;

$l$  – длина активной части витка (проводника);

$v$  – линейная скорость перемещения магнитного поля.

При постоянных значениях  $l$  и  $v$  закон изменения ЭДС  $e(t)$  определяется законом распределения  $B$  в воздушном зазоре машины. Благодаря специальной форме полюсных наконечников распределение магнитной индукции создается синусоидальным вдоль всей окружности зазора между ротором и статором: магнитная индукция максимальна, когда полюса ротора находятся напротив витка обмотки, и постепенно убывает к краям полюсных наконечников при повороте ротора.

В момент времени, когда ротор находится в положении, перпендикулярном указанному на рисунке 8.2, магнитная индукция

---

---

под проводником обмотки равна нулю, и поэтому ЭДС также равна нулю.

После поворота ротора по часовой стрелке в положение, когда полюсные наконечники появляются в зоне проводников обмотки, возникает небольшая ЭДС, постепенно возрастающая до максимума, когда положение ротора соответствует указанному на рисунке 8.2. Затем ЭДС уменьшается до нуля. В это время ток протекает от одного (допустим, верхнего) вывода обмотки к другому.

При последующем вращении ротора поменяются полюса магнитного поля и возникает ЭДС другой полярности (от нижнего к верхнему выводу). Таким образом, на выводах генератора возникает практически синусоидальная ЭДС.

Частота генерируемой ЭДС

$$f = \frac{np}{60},$$

где  $n$  – частота вращающегося ротора, об/мин;

$p$  – число пар полюсов.

Генератор может иметь одну или несколько пар полюсов. Более детально устройство и принцип действия различных генераторов изучают специальные учебные дисциплины: «Электрические машины», «Основы электроники» и др.

### **8.3. Среднее и действующее значения синусоидального тока, напряжения, ЭДС**

Среднее значение периодической функции  $F(t)$  за период  $T$  определяют по формуле

$$F_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt.$$

Значит, среднее значение за период равно высоте прямоугольника с основанием  $T$ , площадь которого равна площади, ограниченной функцией  $F(t)$  и осью абсцисс за один период.

Среднее значение синусоидальной функции за период равно нулю, так как площади положительной и отрицательной полуволн

равны. В данном случае пользуются понятием среднего значения функции, взятой по абсолютному значению, т. е. среднего полупериодного значения, соответствующего положительной полуволне синусоиды (рис. 8.3).

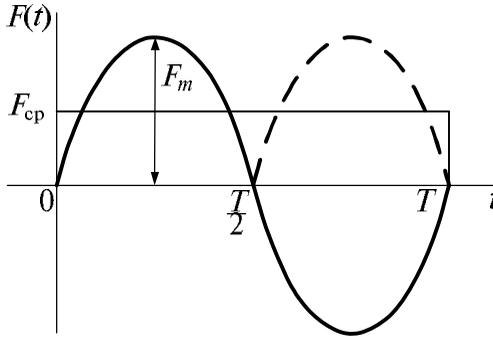


Рис. 8.3. График среднего полупериодного значения синусоидальной функции

Таким образом, под *средним значением* синусоидально изменяющейся величины понимают среднее значение ее за полупериод:

$$F_{\text{ср}} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} F(t) dt.$$

Выполнив интегрирование функции  $e = E_m \sin \omega t$ , получим соотношение между средним и амплитудным значениями:

$$E_{\text{ср}} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} E_m \sin \omega t = \frac{2E_m}{\omega t} \left| \cos \omega t \right|_0^{T/2} = \frac{2}{\pi} E_m.$$

Аналогично средние значения напряжения и тока

$$U_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} U_m; \quad I_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} I_m.$$

Для измерения среднего значения за период применяют приборы магнитоэлектрической системы. При измерении среднего полупериодного значения синусоидальный ток предварительно выпрям-

ляют. Средние значения напряжения, тока и других синусоидальных величин применяют в основном для оценки параметров качества электрической энергии. Для энергетической оценки электроустановок наиболее удобны действующие значения тока, напряжения, ЭДС и других синусоидальных величин электромагнитной энергии.

Действующее значение периодической функции  $F(t)$  вычисляют по формуле

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [F(t)]^2 dt}. \quad (8.2)$$

Поэтому действующее значение является среднеквадратичным значением функции за период. В соответствии с формулой (8.2) действующий периодический ток

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (8.3)$$

Возведя выражение (8.3) в квадрат и умножив обе части полученного выражения на  $RT$ , получим

$$I^2 RT = \int_0^T Ri^2 dt. \quad (8.4)$$

Равенство (8.4) показывает *физический смысл* действующего значения периодического тока, т. е. действующий периодический ток равен такому постоянному току, который, проходя через неизменное сопротивление  $R$ , за период времени  $T$  выделяет то же количество теплоты, что и синусоидальный ток  $i$ .

Проинтегрировав формулу (8.3), получим соотношение между действующим и амплитудным значениями синусоидального тока:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (I_m \sin \omega t)^2 dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \cdot \frac{T}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично для напряжения и ЭДС

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

Понятие действующего значения синусоидально изменяющейся величины широко используют в измерительных приборах и при определении номинальных параметров (тока, напряжения) электротехнических устройств.

При оценке периодических кривых в электроэнергетике вводят понятия коэффициента формы  $k_\phi$ , коэффициента амплитуды  $k_a$  и коэффициента искажения  $k_\alpha$ .

*Коэффициент формы* определяют отношением действующего и среднего за полпериода значений:

$$k_\phi = \frac{F}{F_{\text{cp}}}.$$

Для синусоидальной функции

$$k_\phi = \frac{I_m / \sqrt{2}}{I_m \cdot 2 / \pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11.$$

*Коэффициент амплитуды*  $k_a$  равен отношению амплитудного значения к действующему:

$$k_a = \frac{F_m}{F}.$$

Для синусоидальной функции  $k_a = \sqrt{2} = 1,41$ .

Понятие коэффициента искажения будет рассмотрено в главе 16 «Электрические цепи с периодическими несинусоидальными напряжениями и токами».

**Пример 8.1.** Ток в ветви электрической цепи изменяется по закону  $i = 28,2 \sin(628t - 70^\circ)$  А. Определить действующее амплитудное значение тока, угловую частоту, частоту, период, начальную фазу.

**Решение.** Амплитудное значение – это максимальное значение синусоидальной функции, когда фаза равна  $90^\circ$ :

$$I_m = 28,2 \text{ А.}$$

Действующее значение тока связано с амплитудным соотношением

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}},$$

---

следовательно,

$$I_m = \frac{28,2}{\sqrt{2}} = 20 \text{ А.}$$

Из тригонометрической функции тока следует, что угловая частота  $\omega = 628$  рад/с, начальная фаза  $\psi_i = -70^\circ$ .

Частоту  $f$  определяем из выражении  $\omega = 2\pi f$ :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{628}{2 \cdot 3,14} = 100 \text{ Гц.}$$

$$\text{Период } T = \frac{1}{f} = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ с.}$$

#### 8.4. Различные способы представления синусоидальных величин

Известно несколько способов представления синусоидально изменяющихся величин: в виде тригонометрических функций (8.1), графиков изменений во времени (см. рис. 8.1), вращающихся векторов, в виде комплексных чисел.

Тригонометрическая форма представления синусоидальных величин, равно как и в виде графических зависимостей, практически применима только для простейших электрических цепей, не содержащих большого числа контуров, источников, взаимных индуктивностей и т. п. Это ограничение связано с трудоемкостью выполнения математических действий с синусоидальными величинами токов, напряжений, ЭДС.

**Пример 8.2.** Определить ток  $i_3 = i_1 + i_2$ , если  $i_1 = 20 \sin(\omega t + 30^\circ)$  А,  $i_2 = 40 \sin(\omega t + 60^\circ)$  А.

**Решение.** При сложении синусоидальных величин одной и той же частоты результирующая величина будет синусоидальной.

Чтобы записать функцию результирующей величины, необходимо определить ее максимальное значение и начальную фазу. Следует иметь в виду, что максимумы синусоидальных функций могут наступать неодновременно, поэтому нельзя суммировать амплитудные значения алгебраически.

Проведем сложение токов с помощью построения их графических зависимостей. Изображаем графики зависимостей  $i_1$  и  $i_2$  от времени (рис. 8.4), суммируя ординаты зависимостей  $i_1$  и  $i_2$  для одного и того же момента времени с учетом знака, получаем зависимость  $i_3 = i_1 + i_2$ .

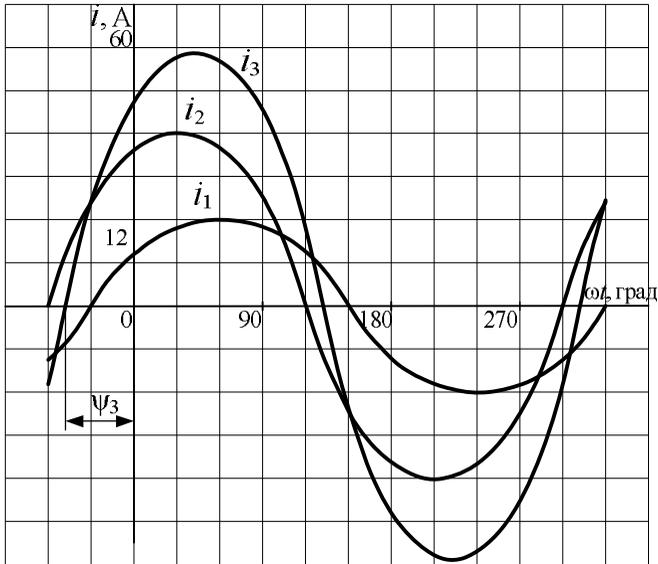


Рис. 8.4. Графические зависимости токов  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$

По графику тока  $i_3$  определяем амплитуду тока  $I_{m_3} = 58$  А и начальную фазу  $\psi_{i_3} = 48^\circ$ , после чего записываем тригонометрическую функцию  $i_3 = 58 \sin(\omega t + 48^\circ)$  А.

Для получения более достоверных результатов необходимо проводить достаточно точное построение графических зависимостей синусоидальных величин, что требует значительной затраты времени.

Для упрощения расчетов цепей переменного тока вводится условное изображение синусоидальных функций векторами.

Пусть длина вектора  $\bar{I}_m$  равна амплитуде тока  $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ . Начало вектора  $\bar{I}_m$  поместим в начало прямоугольной системы координат, вектор расположим под углом  $\psi_i$  (рис. 8.5) к горизонтальной оси.

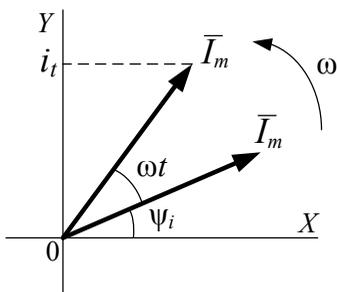


Рис. 8.5. Изображение синусоидальной функции тока  $i$  вращающимся вектором

Отметим, что положительные углы откладываются против часовой стрелки, отрицательные – по часовой стрелке.

Представим, что вектор  $\vec{I}_m$  с момента времени  $t = 0$  начинает вращаться вокруг начала системы координат против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью, равной угловой частоте  $\omega$ . Проекция конца вектора на ось ординат совершает синусоидальные колебания, и каждое мгновенное значение тока, соответствующее моменту времени  $t$ , можно рассматривать как проекцию на ось ординат вектора  $\vec{I}_m$ , повернувшегося на фазовый угол  $\omega t$  относительно оси абсцисс (рис. 8.5).

Следовательно, величину, изменяющуюся во времени по синусоидальному закону, можно изобразить вращающимся вектором.

Совокупность векторов, изображающих синусоидальные ЭДС, напряжения, токи одной и той же частоты, называют *векторной диаграммой*.

Поскольку все синусоидальные величины одной и той же частоты, угловая скорость всех векторов одинакова и взаимное расположение векторов в любой момент времени остается неизменным, поэтому все векторы векторной диаграммы изображают, как правило, для момента времени  $t = 0$ , тогда начальное положение векторов на координатной площади определяется начальными фазами.

Применение векторных диаграмм позволяет просто и наглядно вести расчеты электрических цепей. Например, сложение или вычитание мгновенных значений синусоидальных величин можно заменить сложением или вычитанием векторов, их изображающих.

**Пример 8.3.** Определить ток  $i_3 = i_1 + i_2$  по условию примера 8.2 с помощью векторной диаграммы.

**Решение.** Выбираем масштаб тока и откладываем векторы на координатной плоскости с учетом начальных фаз (рис. 8.6).

Просуммировав векторы тока  $\bar{I}_{m_1}$  и  $\bar{I}_{m_2}$ , получили суммарный вектор  $\bar{I}_{m_3}$ , длина которого в масштабе равна 58 А, начальная фаза  $\psi_{i_3} = 46^\circ$ :

$$i_3 = 58 \sin(\omega t + 46^\circ) \text{ А.}$$

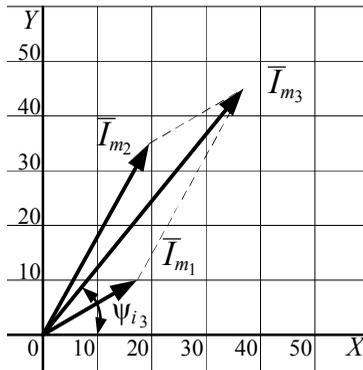


Рис. 8.6. Сложение векторов, изображающих синусоидальные токи  $i_1, i_2$

Применение векторных диаграмм упрощает расчет электрических цепей переменного тока, но требует выполнения определенной графической работы и не дает достаточной точности результата.

Есть возможность объединить простоту векторных диаграмм с возможностью вести расчет электрических цепей синусоидального напряжения с любой точностью. Эта возможность реализуется с помощью представления синусоидальных величин комплексными числами.

Вектор тока, изображающий синусоидальный ток  $i = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$ , можно расположить на комплексной плоскости (рис. 8.7), где горизонтальную ось называют *осью вещественных чисел*, а вертикальную – *осью мнимых чисел*,  $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица.

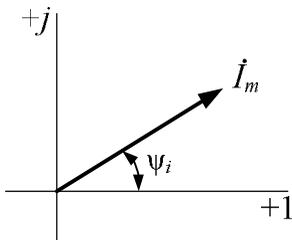


Рис. 8.7. Вектор тока на комплексной плоскости

Вектор  $\dot{I}_m$  называют *комплексной амплитудой тока*.

Каждому вектору на комплексной плоскости соответствует комплексное число, которое может быть записано в различных формах: показательной, тригонометрической, алгебраической, полярной.

В показательной форме комплексная амплитуда тока

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}.$$

В полярной форме комплексная амплитуда тока

$$\dot{I}_m = I_m \angle \psi_i,$$

где  $I_m$  – амплитуда тока или модуль комплексного числа;

$\psi_i$  – начальная фаза тока или аргумент комплексного числа;

$e$  – основание натурального логарифма;

$j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица.

Величину  $e^{j\psi_i}$  называют *оператором поворота*. Умножение комплексной амплитуды  $\dot{I}_m$  на  $e^{j\psi_i}$  или на  $e^{j\omega t}$  означает поворот вектора  $\dot{I}_m$  на угол  $\psi_i$  или  $\omega t$  в положительном направлении.

Переход к *тригонометрической форме* записи комплексного числа осуществляют с помощью формулы Эйлера:

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i} = I_m (\cos \psi_i + j \sin \psi_i).$$

Вычислив значения  $\cos \psi_i$  и  $\sin \psi_i$ , получим *алгебраическую форму* комплексного числа:

$$\dot{I}_m = I_m (\cos \psi_i + j \sin \psi_i) = a + jb,$$

где  $a = I_m \cos \psi_i$  – действительная часть комплексного числа или проекция вектора  $\dot{I}_m$  на ось вещественных чисел;

$b = I_m \sin \psi_i$  – коэффициент при мнимой части комплексного числа или проекция вектора  $\dot{I}_m$  на ось мнимых чисел.

Переход от алгебраической формы записи комплексного числа к показательной осуществляют в такой последовательности: если дана комплексная амплитуда тока в виде  $\dot{I}_m = a + jb$ , определяют модуль числа  $I_m = \sqrt{a^2 + b^2}$  и аргумент  $\psi_i = \arctg \frac{b}{a}$ . Значит, в показательной форме получим  $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$ .

*Замечание.* Обычно при расчетах пользуются действующими значениями. Комплекс действующего значения электрической величины получают путем деления комплексной амплитуды на  $\sqrt{2}$ . Комплексы действующих значений кратко называют комплексом величины, например комплекс тока.

Буквенные обозначения синусоидально изменяющихся величин приведены в таблице 8.1.

Таблица 8.1

**Буквенные обозначения  
синусоидально изменяющихся величин**

Обозначение	Название
$i, u, e$	Мгновенные значения (соответственно тока, напряжения, ЭДС)
$I_m, U_m, E_m$	Амплитудные значения
$I, U, E$	Действующие значения
$\dot{I}_m, \dot{U}_m, \dot{E}_m$	Комплексные амплитуды
$\dot{I}, \dot{U}, \dot{E}$	Комплексные действующие значения

**Пример 8.4.** Представить в показательной, тригонометрической, алгебраической формах и изобразить вектором напряжение  $u = 20 \sin (\omega t + 30^\circ)$  В на комплексной плоскости.

---

---

**Решение.**

а) показательная:  $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi} = 20e^{j30^\circ}$  В;

б) тригонометрическая  $\dot{U}_m = U_m (\cos \psi + j \sin \psi) = 20(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ)$  В;

в) алгебраическая:  $\dot{U}_m = U_m (\cos \psi + j \sin \psi) = 20 \frac{\sqrt{3}}{2} + j20 \frac{1}{2} = 17,3 + j10$  В.

Изображение синусоидальной функции вектором на комплексной плоскости показано на рисунке 8.8. Если величина задана в алгебраической форме (например, напряжение  $\dot{U}_m = 17,3 + j10$  В), то, чтобы выразить его в показательной, определим амплитуду

$$U_m = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{17,3^2 + 10^2} = 20 \text{ В}$$

и начальную фазу

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arctg} \frac{10}{17,3} = 30^\circ, \text{ тогда } \dot{U}_m = 20e^{j30^\circ} \text{ В.}$$

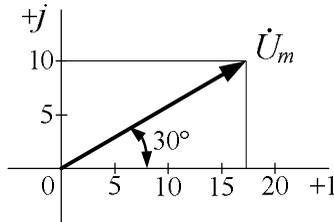


Рис. 8.8. Вектор комплексной амплитуды напряжения

**Пример 8.5.** Определить ток  $i_3 = i_1 + i_2$ , если  $i_1 = 20 \sin(\omega t + 30^\circ)$  А,  $i_2 = 40 \sin(\omega t + 60^\circ)$  А аналитически.

**Решение.** Для аналитического сложения запишем комплексные амплитуды токов:

$$\dot{I}_{m_1} = 20e^{j30^\circ} = 20 \cos 30^\circ + j20 \sin 30^\circ = 17,3 + j10 \text{ А};$$

$$\dot{I}_{m_2} = 40e^{j60^\circ} = 40 \cos 60^\circ + j40 \sin 60^\circ = 20 + j34,6 \text{ А.}$$

Значит,  $\dot{I}_{m_3} = \dot{I}_{m_1} + \dot{I}_{m_2} = 17,3 + j10 + 20 + j34,6 = 37,3 + j44,6$  А.

Чтобы записать мгновенное значение тока  $i_3$ , определим амплитуду:

$$I_{m_3} = \sqrt{37,3^2 + 44,6^2} = 58 \text{ А}$$

и начальную фазу:

$$\psi_3 = \arctg \frac{44,6}{37,3} = 50^\circ.$$

Тогда

$$i_3 = 58 \sin (\omega t + 50^\circ) \text{ А.}$$

Метод расчета электрических цепей синусоидального тока, основанный на изображении гармонических функций комплексными числами, называют *методом комплексных величин* или *символическим методом*.

Записав основные законы электрических цепей (закон Ома, законы Кирхгофа) в комплексной форме, можно применить те же методы расчета, что и для цепей постоянного напряжения.

Символический метод сохраняет наглядность графического решения, так как по символической записи электрических величин – тока, напряжения, ЭДС – легко построить векторную диаграмму, а также дает возможность, используя аналитический метод, решать вопросы с высокой степенью точности.



### Вопросы и задачи для самоконтроля

1. Поясните понятия синусоидальных ЭДС, напряжения, тока.
2. Назовите основные величины, характеризующие синусоидально изменяющуюся величину.
3. Изобразите синусоидальную функцию вектором и комплексным числом.
4. Запишите комплексную амплитуду тока в показательной, тригонометрической и алгебраической формах, если мгновенное значение тока  $i = 141 \sin (\omega t - 30^\circ)$  А. Ответ:  $\dot{I}_m = 141e^{-j30^\circ}$ ;  $\dot{I}_m = 141 (\cos 30^\circ - j \sin 30^\circ)$ ;  $\dot{I}_m = 122,3 - j70,5$ .
5. Объясните, что понимают под средним и действующим значениями синусоидально изменяющейся величины.
6. Просуммируйте аналитически и с помощью векторов две синусоидальные функции:  $e_1 = 282 \sin \omega t$  В и  $e_2 = 141 \sin (\omega t + 60^\circ)$  В. Ответ:  $e_3 = 372,2 \sin (\omega t - 19^\circ)$ .

---

7. Раскройте понятие векторной диаграммы. На основании чего и как ее строят?

8. Запишите тригонометрическую функцию тока  $i$ , если комплекс действующего значения  $\dot{I} = 6 - j8$  А,  $f = 50$  Гц. Ответ:  $i = 14,1 \sin(314t - 53^\circ)$ .

9. Два генератора синусоидальной ЭДС включены параллельно. Ток одного генератора  $i_1 = 100 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$  А. Общий ток генератора  $i = i_1 + i_2 = 100 \sin \omega t$  А. Найдите выражение тока второго генератора  $i_2$ . Ответ:  $i_2 = 100 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$  А.

## 9. ЭЛЕМЕНТЫ И ПАРАМЕТРЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

### 9.1. Особенности параметров электрических цепей синусоидального тока

В состав электрических цепей переменного тока обычно входят резистивные элементы, катушки индуктивности, конденсаторы.

В резистивных элементах электрическая энергия преобразуется в другие виды энергии. Эти элементы характеризуются значением сопротивления  $R$ . В электрических цепях постоянного тока его могут называть омическим.

В теории цепей синусоидального тока сопротивление  $R$  называют *активным сопротивлением*. С одной стороны, это вызвано тем, что необходимо привести название данного сопротивления в соответствие с названиями других по характеру сопротивлений (индуктивное, емкостное, реактивное, полное), характеризующих цепь синусоидального тока, с другой – тем, что один и тот же проводник оказывает большее сопротивление переменному току, чем постоянному. Причиной тому служит поверхностный эффект. Если по проводнику проходит переменный ток, то создается переменный магнитный поток в пространстве, окружающем проводник, и внутри самого проводника (рис. 9.1).

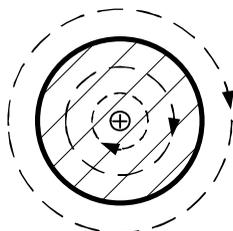


Рис. 9.1. Поперечное сечение проводника с током с изображением магнитных силовых линий

---

Переменный магнитный поток индуцирует в проводнике ЭДС самоиндукции  $e = -\frac{d\psi}{dt}$ .

В центральной части проводника будет наводиться бóльшая по величине ЭДС самоиндукции, чем в слоях, расположенных ближе к его поверхности. Наведенные ЭДС создают большое сопротивление в центральной части проводника, вследствие чего ток вытесняется к поверхности проводника. Таким образом, по центральной части сечения ток практически не протекает. Площадь сечения, по которому протекает ток, как бы меньше, и сопротивление проводника возрастает. Явление вытеснения тока к поверхности проводника называют *поверхностным эффектом*. Это явление усиливается при увеличении частоты тока, магнитной проницаемости, сечения проводника, тока.

Если провода выполнены из стали, необходим учет поверхностного эффекта даже при промышленной частоте  $f = 50$  Гц и малых сечениях. Для медных проводов диаметром меньше 10 мм при  $f = 50$  Гц поверхностный эффект можно не учитывать и считать активное сопротивление равным омическому. Явление поверхностного эффекта имеет практическое применение, например его используют для поверхностной закалки стальных изделий.

Любой резистивный элемент обладает некоторой индуктивностью и емкостью. Однако влиянием индуктивности и емкости в ряде случаев можно пренебречь, например при низкой частоте.

Реальный индуктивный элемент (индуктивная катушка) обладает, кроме индуктивности, и сопротивлением, которым, как правило, пренебречь нельзя. Тогда на схеме замещения индуктивная катушка изображается в виде двух последовательно соединенных элементов  $R$  и  $L$ .

В реальном емкостном элементе (конденсаторе) имеются некоторые потери энергии из-за несовершенства диэлектрика, применяемого в конденсаторе. В таком случае реальный емкостный элемент изображают на схеме замещения в виде параллельного соединения емкости  $C$  с проводимостью  $g$ . Потери энергии чаще всего относительно невелики, ими пренебрегают и изображают конденсатор в виде идеального емкостного элемента  $C$ .

Процессы в цепях переменного тока принципиально отличаются от процессов в цепях постоянного тока. В цепях переменного тока при изменениях напряжений и токов изменяются магнитные и электрические поля, связанные с цепью. При изменениях магнитных полей возникают ЭДС самоиндукции и взаимной индукции, а при изменениях электрических полей в цепи протекают зарядные и разрядные токи.

Законы, сформулированные в применении к цепям постоянного тока, очевидно, справедливы и для цепей переменного тока, но только для реально существующих в каждый момент времени мгновенных значений величин.

На основе выражений, полученных по этим законам для мгновенных значений, составляются уравнения и формулируются законы для векторов или изображений напряжений, ЭДС и токов в комплексном (символическом) виде.

В цепях переменного тока показываются, так же как и в цепях постоянного тока, условные положительные направления ЭДС, напряжений, токов. Хотя со временем эти направления могут меняться, но при составлении уравнений важна только взаимная ориентировка направлений токов, напряжений, ЭДС, поэтому в соответствии с принятыми положительными направлениями для мгновенных значений показываются и положительные направления для их амплитудных, действующих величин, а также их изображений.

Зависимости между токами и напряжениями резистивных, индуктивных, емкостных элементов определяются происходящими в них физическими процессами. Математическое описание физических явлений для каждого из этих элементов зависит от выбранного способа представления синусоидальных величин.

## **9.2. Законы Кирхгофа для цепей синусоидального тока**

Для цепей синусоидального тока справедливы законы Кирхгофа, сформулированные ранее для цепей постоянного тока. Так как синусоидальные величины ЭДС, напряжения, тока характеризуются мгновенными, максимальными, действующими значениями, то математическая формулировка законов Кирхгофа для цепей синусоидального тока

---

---

соидального тока зависит от выбранного способа представления синусоидальных величин.

Законы Кирхгофа можно сформулировать для *мгновенных значений* синусоидальных величин (*дифференциальная форма*).

*Первый закон Кирхгофа.* Алгебраическая сумма токов в узле электрической цепи в любой момент времени равна нулю:

$$\sum i = 0.$$

*Второй закон Кирхгофа.* Алгебраическая сумма падений напряжений в контуре равна алгебраической сумме ЭДС того же контура в любой момент времени:

$$\sum u = \sum e.$$

Законы Кирхгофа нельзя сформулировать в алгебраической форме для амплитудных и действующих значений, так как амплитуды, скажем, токов в узле, не совпадают по времени и их нельзя суммировать алгебраически.

Представив синусоидальные величины векторами или комплексными числами, можно сформулировать законы Кирхгофа для амплитудных и действующих значений только в векторной или комплексной форме.

*Первый закон Кирхгофа в комплексной форме.* Алгебраическая сумма комплексных токов в узле равна нулю:

$$\sum \dot{I} = 0.$$

*Второй закон Кирхгофа в комплексной форме.* Алгебраическая сумма комплексных падений напряжений в контуре равна алгебраической сумме комплексных ЭДС того же контура:

$$\sum \dot{U} = \sum \dot{E}.$$

Порядок составления уравнений по законам Кирхгофа, правило знаков аналогичны тем, что применялись для цепей постоянного тока.

### 9.3. Цепь синусоидального тока с активным сопротивлением

Рассмотрим цепь с идеальным резистивным элементом  $R$  (рис. 9.2).

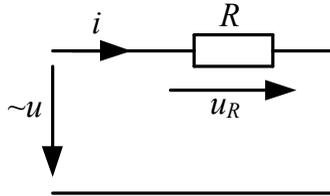


Рис. 9.2. Схема электрической цепи с активным элементом

Если к резистивному элементу  $R$  подвести синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ , то через него пройдет ток  $i$ .

Согласно закону Ома, ток в любой момент времени, протекающий по сопротивлению  $R$ , определяется выражением

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m \sin(\omega t + \psi_u)}{R} = I_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad (9.1)$$

где  $I_m = \frac{U_m}{R}$  – амплитуда тока.

Из выражения (9.1) следует, что при синусоидальном напряжении, приложенном к активному сопротивлению, протекающий ток также синусоидальный и имеет начальную фазу, равную начальной фазе напряжения. Угол сдвига по фазе – угол между вектором тока и вектором напряжения, определяемый разностью начальных фаз напряжения и тока  $\varphi = \psi_u - \psi_i$ , на рассматриваемом участке равен нулю.

В цепи синусоидального тока с резистором  $R$  не только мгновенные значения напряжения, тока, но и соответственно амплитудные и действующие значения связаны между собой законом Ома:

$$u = iR; U_m = I_m R; U = IR.$$

Пользуясь величиной проводимости  $g = \frac{1}{R}$ , получаем

$$I_m = gU_m; I = gU.$$

Ток и напряжение совпадают по фазе (рис. 9.3).

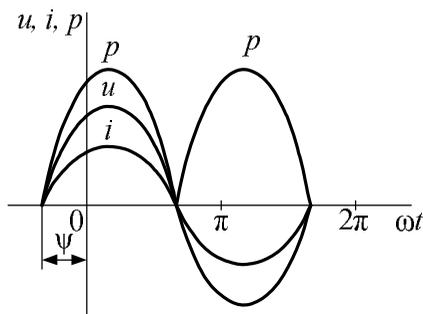


Рис. 9.3. Мгновенные значения напряжения, тока и мощности в резисторе

В комплексной форме соотношения между векторами записывают в следующем виде:

$$\dot{U}_m = \dot{I}_m R; \quad \dot{U} = \dot{I} R.$$

Комплекс тока  $\dot{I}$  совпадает по фазе с комплексом напряжения  $\dot{U}$  (рис. 9.4).

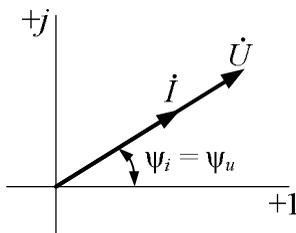


Рис. 9.4. Векторная диаграмма напряжения и тока для участка цепи с активным сопротивлением

Мгновенная мощность, поступающая в сопротивление:

$$p = ui = U_m I_m \sin^2(\omega t + \psi_u) = UI [1 - \cos(2\omega t + \psi_u)], \quad (9.2)$$

имеет постоянную составляющую  $UI$  и косинусоидальную функцию  $UI \cos(2\omega t + \psi)$  с амплитудой  $UI$  и удвоенной угловой частотой

той  $2\omega$ . Как следует из выражения (9.2), мгновенная мощность в течение полупериода изменяется от 0 до  $2UI$  (см. рис. 9.3).

Среднее значение мгновенной мощности за период называют *активной мощностью*:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T [UI - \cos(2\omega t + \psi_u)] dt = UI.$$

Для участка цепи с активным сопротивлением активную мощность определяют по формуле

$$P = UI = I^2 R.$$

*Активная мощность* измеряется в ваттах (1 Вт = 1 ВА).

#### 9.4. Цепь синусоидального тока с индуктивным элементом

В природе нет цепей, которые обладали бы только индуктивностью. Любая цепь обладает некоторым активным сопротивлением, пусть даже малым. Рассмотрение цепи, обладающей только индуктивностью, является научной абстракцией, позволяющей ясно представить себе свойства такого элемента.

Пусть через индуктивный элемент  $L$  проходит синусоидальный ток  $i$  (рис. 9.5):

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

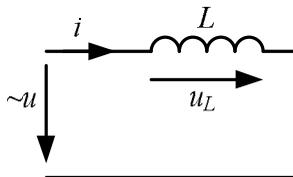


Рис. 9.5. Схема цепи переменного тока с индуктивностью

Изменение тока в цепи с индуктивностью  $L$  вызывает ЭДС самоиндукции  $e_L$ , которая по правилу Ленца противодействует изменению тока:

$$e_L = -L \frac{di}{dt}.$$

Чтобы в цепи протекал ток, требуется иметь на зажимах цепи напряжение, уравнивающее ЭДС самоиндукции, равное ей по значению и противоположное по знаку:

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos(\omega t + \psi_i) = U_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right).$$

Полученное выражение показывает, что напряжение на индуктивности изменяется по синусоидальному закону, имеет начальную фазу  $\psi_u = \psi_i + \frac{\pi}{2}$  (рис. 9.6).

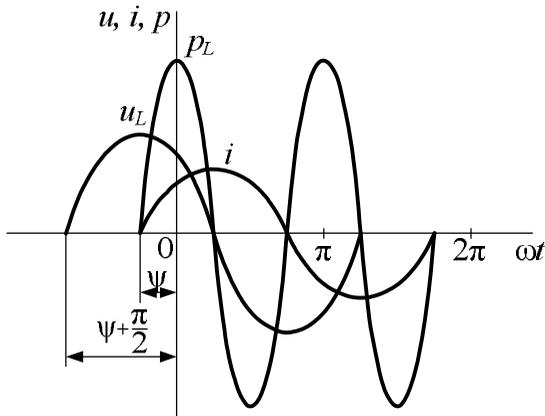


Рис. 9.6. Мгновенные значения напряжения, тока и мощности в индуктивности

Угол сдвига по фазе между напряжением и током в цепи с индуктивностью положительный:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \frac{\pi}{2}.$$

Амплитудные и соответственно действующие значения напряжения и тока связаны соотношением, подобным закону Ома:

$$U_m = \omega L I_m = X_L I_m; \quad U = \omega L I = X_L I.$$

Величину  $X_L = \omega L$ , имеющую размерность сопротивления (Ом), называют *индуктивным сопротивлением*, а обратную ей величину  $b_L = \frac{1}{\omega L}$ , имеющую размерность проводимости (См), называют *индуктивной проводимостью*.

Тогда

$$I_m = b_L U_m; \quad I = b_L U.$$

В комплексной форме соотношение между векторами

$$\dot{U}_m = j\omega L \dot{I}_m = jX_L \dot{I}_m; \quad \dot{U} = j\omega L \dot{I} = jX_L \dot{I}.$$

Вектор напряжения  $\dot{U}$  опережает вектор тока  $\dot{I}$  на угол  $\frac{\pi}{2}$  (рис. 9.7).

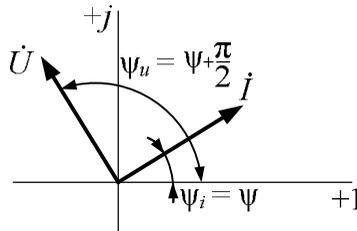


Рис. 9.7. Векторная диаграмма напряжения и тока для участка цепи с индуктивностью

Мгновенная мощность, поступающая в индуктивность:

$$p_L = ui = U_m \sin \left( \omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2} \right) I_m \sin (\omega t + \psi_i) = UI \sin (2\omega t + \psi_i),$$

колеблется по синусоидальному закону с угловой частотой  $2\omega$ , имея амплитуду  $UI$  (см. рис. 9.6). Поступая от источника питания, энергия временно (в течение четверти периода, когда мощность положительна) запасается в магнитном поле индуктивности, а затем (в следующую четверть периода, когда мощность отрицательна) возвращается в источник при исчезновении магнитного поля.

Таким образом происходит колебание (обмен) энергии между источником питания и индуктивностью, причем активная мощность  $P = 0$ .

### 9.5. Цепь синусоидального тока с емкостным элементом

Рассмотрение процессов в цепи, обладающей только емкостью, является также научной абстракцией, как и в случае цепи с индуктивностью.

В цепи (рис. 9.8) с идеальным конденсатором (конденсатором без потерь), включенным на синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ , электрический заряд на пластинах конденсатора изменяется пропорционально напряжению  $q = C u = C U_m \sin(\omega t + \psi_u)$  и, следовательно, в цепи будет проходить переменный ток. Мгновенный ток в цепи равен скорости изменения заряда конденсатора:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} [C U_m \sin(\omega t + \psi_u)] = \omega C U_m \cos(\omega t + \psi_u) = I_m \sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right). \quad (9.3)$$

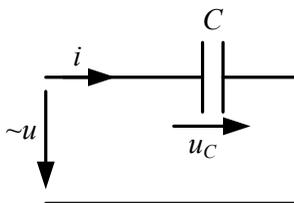


Рис. 9.8. Схема цепи переменного напряжения с емкостным элементом

Согласно выражению (9.3), ток, проходящий через емкостный элемент  $C$ , изменяется по синусоидальному закону и имеет начальную фазу  $\psi_i = \psi_u + \frac{\pi}{2}$ .

Следовательно, ток  $i$  опережает приложенное напряжение  $u$  на угол  $\frac{\pi}{2}$ . Нулевым значениям тока соответствуют максимальные (положительные или отрицательные) значения напряжения (рис. 9.9).

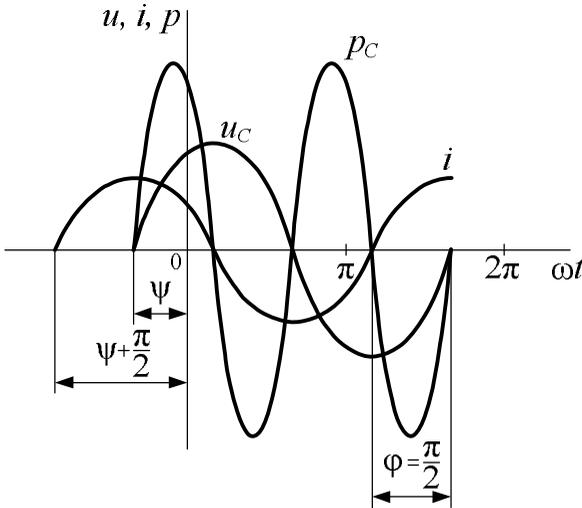


Рис. 9.9. Мгновенные значения напряжения, тока и мощности в емкости

Сдвиг по фазе между напряжением и током в цепи с емкостью отрицательный:

$$\phi = \psi_u - \psi_i = -\frac{\pi}{2}.$$

Амплитудные и соответственно действующие значения напряжения и тока связаны соотношением, подобным закону Ома:

$$U_m = \frac{1}{\omega C} I_m = X_C I_m; \quad U = \frac{1}{\omega C} I = X_C I.$$

Величину  $X_C = \frac{1}{\omega C}$ , имеющую размерность сопротивления (Ом), называют *емкостным сопротивлением*. Обратную емкостно-

му сопротивлению величину  $b_C = \omega C$ , имеющую размерность проводимости (См), называют *емкостной проводимостью*.

Следовательно,

$$I_m = b_C U_m; I = b_C U.$$

В комплексной форме соотношение между векторами

$$\dot{U}_m = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I}_m = -j X_C \dot{I}_m; \dot{U} = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I} = -j X_C \dot{I}.$$

Вектор тока  $\dot{I}$  опережает вектор напряжения  $\dot{U}$  на угол  $\frac{\pi}{2}$  (рис. 9.10).

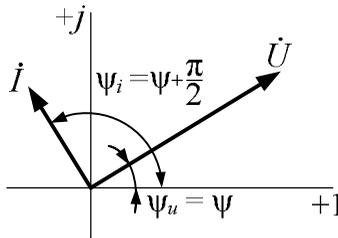


Рис. 9.10. Векторная диаграмма напряжения и тока для участка цепи с емкостью

Мгновенная мощность, поступающая в емкость, равна скорости изменения электрического поля емкости:

$$\begin{aligned} p_C = u_C i &= U_m \sin(\omega t + \psi_u) I_m \sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} 2 \sin(\omega t + \psi_u) \cos(\omega t + \psi_u) = UI \sin(2\omega t + \psi_u). \end{aligned}$$

Мощность колеблется по синусоидальному закону с угловой частотой  $2\omega$ , имея амплитуду  $UI$  (см. рис. 9.9). Поступая от источника питания, энергия временно (в течение четверти периода, когда мощность положительна) запасается в электрическом поле емкости, а затем (в следующую четверть периода, когда мощность отрицательна) возвращается в источник при исчезновении элек-

трического поля. Таким образом происходит колебание (обмен) энергии между источником питания и емкостью, причем активная мощность  $P = 0$ .

**Пример 9.1.** К цепи приложено напряжение  $u = 50 \sin \omega t$  В, ток в цепи: 1)  $i = 10 \sin \omega t$  А; 2)  $i = 10 \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$  А; 3)  $i = 10 \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$  А.

Какие сопротивления включены в цепь в каждом из трех случаев?

**Решение.** Из условия задачи следует, что  $U_m = 50$  В,  $I_m = 10$  А. В первом случае включено только активное сопротивление, так как напряжение и ток совпадают по фазе:  $\psi_u = 0$  и  $\psi_i = 0$ ;  $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$ .

Согласно закону Ома, активное сопротивление

$$R = \frac{U_m}{I_m} = \frac{50}{10} = 5 \text{ Ом.}$$

Во втором случае ток отстает по фазе на  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ , и содержит только индуктивное сопротивление:

$$X_L = \frac{U_m}{I_m} = \frac{50}{10} = 5 \text{ Ом.}$$

В третьем случае ток опережает по фазе напряжение на  $\frac{\pi}{2}$  – в цепь включена только емкость, сопротивление которой

$$X_C = \frac{U_m}{I_m} = \frac{50}{10} = 5 \text{ Ом.}$$

**Пример 9.2.** По индуктивному элементу  $L = 10$  мГн проходит ток  $i = 10 \sin (1000t + 30^\circ)$  А. Записать выражение падения напряжения на индуктивности.

**Решение.** Ответ можно получить несколькими способами.

1. Можно использовать связь мгновенного тока, проходящего через индуктивность, и мгновенного напряжения на ней:

$$\begin{aligned} u &= L \frac{di}{dt} = 10^{-2} \frac{d[10 \sin (1000t + 30^\circ)]}{dt} = 10^{-2} \cdot 1000 \cdot 10 \cos (1000t + 30^\circ) = \\ &= 100 \sin (1000t + 12^\circ) \text{ В.} \end{aligned}$$

2. Напряжение на индуктивном элементе изменяется по закону

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Определяем по закону Ома

$$U_m = I_m X_L = I_m \omega L = 10 \cdot 1000 \cdot 10^{-2} = 100 \text{ В}.$$

Определяем начальную фазу  $\psi_u$  из выражения  $\varphi = \psi_u - \psi_i$ .

Поскольку угол сдвига фаз на индуктивном элементе равен  $90^\circ$ , то

$$\psi_u = \varphi + \psi_i = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ;$$

$$u = 100 \sin(1000t + 120^\circ) \text{ В}.$$

### 9.6. Цепь синусоидального тока с реальной катушкой индуктивности

Схема замещения реальной катушки на низких частотах представляет собой последовательное соединение активного и индуктивного элементов (рис. 9.11).

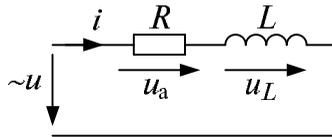


Рис. 9.11. Схема замещения реальной катушки

Пусть по цепи под действием синусоидального напряжения  $u$  протекает ток  $i = I_m \sin \omega t$ . На элементах возникнут напряжения

$u_a = iR$  – активная составляющая напряжения;  $u_L = L \frac{di}{dt}$  – индук-

тивная составляющая напряжения. Следует отметить, что в реальных катушках нет таких точек, между которыми действовало бы напряжение  $u_a$  или  $u_L$ . Физической величиной является напряжение на выводах обмотки катушки. Деление физической величины на составляющие представляет собой удобный вычислительный прием. Напряжение на катушке можно записать согласно второму закону Кирхгофа:

$$u = u_a + u_L = RI_m \sin \omega t + L\omega I_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (9.4)$$

Обе составляющие напряжения изменяются по синусоидальному закону. Известно, что сумма синусоидальных функций одной и той же частоты есть синусоидальная функция той же частоты, т. е.  $u = U_m \sin (\omega t + \psi_u)$ .

Изобразив все составляющие выражения (9.4) векторами, построим векторную диаграмму (рис. 9.12) для действующих значений.

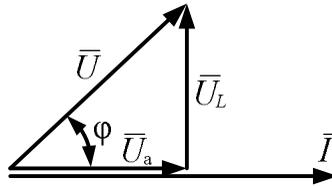


Рис. 9.12. Векторная диаграмма для цепи с реальной катушкой

За основной вектор принимаем вектор тока  $\bar{I}$ . Вектор активного напряжения совпадает по фазе с вектором тока, вектор индуктивного напряжения опережает вектор тока на  $90^\circ$ .

Из треугольника напряжений можно составить ряд соотношений, которые часто встречаются при расчете цепей синусоидального тока:

$$U_a = U \cos \varphi; \quad U_L = U \sin \varphi; \quad U = \sqrt{U_a^2 + U_L^2}.$$

Величина угла сдвига фаз зависит от соотношения индуктивной и активной составляющих напряжения и определяется из векторной диаграммы (см. рис. 9.12):

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{U_L}{U_a}.$$

Поскольку  $U_a = IR$ ,  $U_L = \omega LI$ , то напряжение цепи

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_L^2} = \sqrt{(RI)^2 + (\omega LI)^2} = I\sqrt{R^2 + (\omega L)^2},$$

---

---

откуда ток в цепи

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{U}{Z}. \quad (9.5)$$

Формула (9.5) выражает закон Ома в действующих значениях для цепи с активным сопротивлением и индуктивностью. Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \quad (9.6)$$

называется полным сопротивлением цепи и измеряется в омах.

Следует обратить внимание на то, что различная физическая природа активного и реактивного сопротивлений определяет особое правило сложения этих сопротивлений.

На основании выражения (9.6) полное, активное и реактивное сопротивления графически представляют прямоугольный треугольник (рис. 9.13).

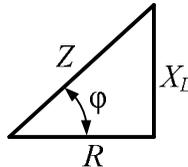


Рис. 9.13. Треугольник сопротивлений цепи с активным сопротивлением и индуктивностью

Треугольник сопротивлений подобен треугольнику напряжений, так как его можно получить из треугольника напряжений, уменьшив его стороны в  $I$  раз.

Угол сдвига фаз можно определить из треугольника сопротивлений  $\varphi = \arctg \frac{X_L}{R}$ , т. е. его величина зависит от соотношения индуктивного и активного сопротивлений.

Второй закон Кирхгофа для рассматриваемой цепи можно записать и в комплексной форме:

$$\dot{U} = \dot{U}_a + \dot{U}_L.$$

Согласно закону Ома, в комплексной форме

$$\dot{U}_a = \dot{I}R, \quad \dot{U}_L = j\omega L\dot{I},$$

тогда

$$\dot{U} = \dot{I}R + j\omega L\dot{I},$$

откуда

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j\omega L} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}. \quad (9.7)$$

Выражение (9.7) представляет собой закон Ома в комплексной форме для цепи с реальной катушкой. Здесь  $\underline{Z} = R + j\omega L$  называют комплексом полного сопротивления.

Рассмотрим энергетическое состояние цепи, содержащей активное сопротивление и индуктивность.

Мгновенная мощность в рассматриваемой цепи

$$p = ui = U_m \sin(\omega t + \varphi)I_m \sin \omega t = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi). \quad (9.8)$$

Очевидно, что мгновенная мощность изменяется не по синусоидальному закону с двойной частотой (рис. 9.14).

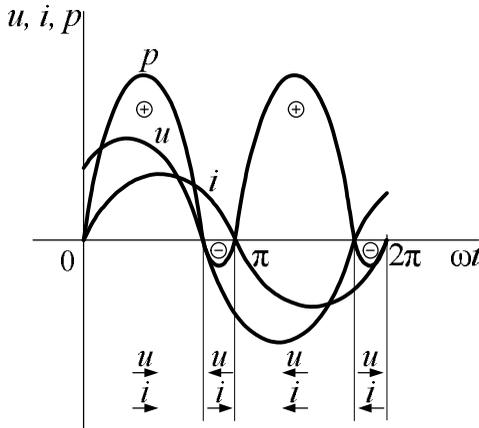


Рис. 9.14. Графики изменения тока, напряжения и мгновенной мощности

Мгновенную мощность (9.8) можно рассматривать как сумму двух составляющих: постоянной  $UI \cos \varphi$  и синусоидальной изменяющейся с двойной частотой.

В определенные части периода (см. рис. 9.14), когда направления тока и напряжения совпадают, мгновенная мощность положительна. В это время энергия поступает от источника к потребителю, где преобразуется на активном элементе в тепловую энергию, и накапливается на индуктивном элементе магнитная энергия. В небольшой период времени (см. рис. 9.14) мгновенная мощность отрицательна (направления тока и напряжения противоположны). Накопленная энергия в магнитном поле возвращается обратно источнику. Таким образом, в цепи наряду с преобразованием электрической энергии в тепловую происходит обмен электроэнергией между источником питания и катушкой.

Среднее значение мгновенной мощности за период

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T [UI \cos \varphi - UI \cos (2\omega t + \varphi)] dt = UI \cos \varphi.$$

Средняя мощность равна постоянной составляющей мгновенной мощности, всегда положительна. Она характеризует интенсивность передачи энергии от источника к приемнику и преобразование в другие виды энергии, т. е. активный необратимый процесс. Поэтому среднюю мощность называют *активной мощностью*:

$$P = UI \cos \varphi.$$

*Единица измерения* – ватт (Вт).

Поскольку  $U \cos \varphi = U_a = IR$ , то активную мощность можно определить как  $P = I^2 R$ .

Обмен энергией количественно оценивается *реактивной индуктивной мощностью*  $Q_L = U_L I$ .

Так как реактивная составляющая напряжения  $U_L = U \sin \varphi$ , то реактивная индуктивная мощность

$$Q_L = UI \sin \varphi.$$

*Реактивная мощность* измеряется в варах (вар).

Поскольку  $U \sin \varphi = U_L = IX_L$ , реактивную мощность можно определить  $Q_L = I^2 X_L$ .

Произведение действующих значений напряжения и тока называют *полной мощностью*  $S$ :

$$S = UI.$$

*Единица измерения полной мощности* – вольт-ампер (ВА).

Применение различных названий единиц измерения мощности позволяет определить, какая мощность рассматривается: активная, реактивная или полная.

Активная, реактивная и полная мощности графически изображаются сторонами прямоугольного треугольника мощностей (рис. 9.15).

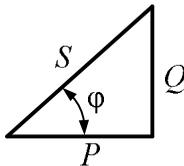


Рис. 9.15. Треугольник мощностей

Из треугольника мощностей следует, что полная мощность

$$S = \sqrt{P^2 + Q_L^2}.$$

Активная мощность  $P = S \cos \varphi$ , откуда следует, что  $\cos \varphi = \frac{P}{S}$ .

Отношение активной мощности к полной называют *коэффициентом мощности*. В цепях синусоидального тока он численно равен косинусу угла сдвига фаз.

Коэффициент мощности показывает, какая часть полной мощности идет на совершение работы. Коэффициент мощности имеет важное экономическое значение, о котором будет сказано ниже.

**Пример 9.3.** Определить мгновенное значение тока в цепи с последовательным соединением резистора и индуктивной катушки, если мгновенное значение приложенного к цепи напряжения  $u = 100\sqrt{2} \sin \omega t$  В, активное сопротивление  $R = 6$  Ом, индуктивное сопротивление  $X_L = 8$  Ом.

---

---

**Решение.** Ток в цепи можно определить по закону Ома для действующих значений напряжения и тока:

$$I = \frac{U}{Z}.$$

Действующее значение напряжения

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{100\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 100 \text{ В}.$$

Полное сопротивление

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ Ом},$$

тогда

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{100}{10} = 10 \text{ А}.$$

Амплитудное значение тока  $I_m = \sqrt{2}I = 10\sqrt{2} \text{ А}$ .

Сдвиг фаз между напряжением и током

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \arctg \frac{X_L}{R} = \arctg \frac{8}{6} = 53^\circ.$$

Поскольку  $\psi_u = 0$ , то  $\psi_i = -\varphi = -53^\circ$ . Значит,

$$i = 10\sqrt{2} \sin(\omega t - 53^\circ) \text{ А}.$$

**Пример 9.4.** Цепь с последовательным соединением активного сопротивления  $R$  и индуктивности  $L$  подключена к источнику синусоидального напряжения  $U = 200 \text{ В}$ , частота  $50 \text{ Гц}$ . По цепи протекает ток  $I = 2 \text{ А}$ , потребляется активная мощность  $P = 240 \text{ Вт}$ . Определить параметры цепи  $R$  и  $L$ .

**Решение.** Активное сопротивление цепи определяем из формулы активной мощности:

$$P = UI \cos \varphi = I^2 R; R = \frac{P}{I^2} = \frac{240}{2^2} = 60 \text{ Ом}.$$

По закону Ома определяем полное сопротивление цепи

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{200}{2} = 100 \text{ Ом}.$$

Так как  $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ , то  $X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{100^2 - 60^2} = 80 \text{ Ом}$ .

Следовательно,

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{80}{2 \cdot 3,14 \cdot 50} = 0,255 \text{ Гн.}$$

### 9.7. Цепь синусоидального напряжения с последовательным соединением активного сопротивления и электрической емкости

Если в цепи (рис. 9.16) с последовательным соединением активного сопротивления и электрической емкости проходит синусоидальный ток  $i = I_m \sin \omega t$ , то на каждом элементе создается падение напряжения, изменяющееся по синусоидальному закону:

$$u_a = iR = I_m R \sin \omega t = U_{am} \sin \omega t;$$

$$U_C = U_{Cm} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = I_m X_C \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

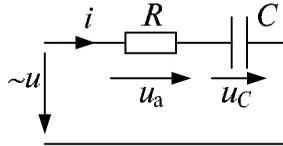


Рис. 9.16. Схема цепи с последовательным соединением элементов  $R$  и  $C$

Согласно второму закону Кирхгофа, напряжение на входе цепи

$$u = u_a + u_C = U_{am} \sin \omega t + U_{Cm} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = U_m \sin (\omega t - \varphi).$$

Напряжение на входе цепи синусоидально и отстает от тока по фазе на угол  $\varphi$ .

На основании второго закона Кирхгофа в векторной форме  $\vec{U} = \vec{U}_a + \vec{U}_C$  построим векторную диаграмму, взяв за основной вектор тока  $\vec{I}$  (рис. 9.17).

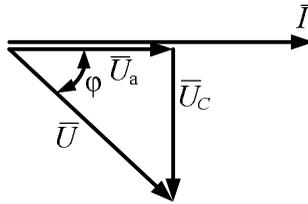


Рис. 9.17. Векторная диаграмма для  $RC$ -цепи

Из векторной диаграммы следует, что

$$\begin{aligned}
 U &= \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = \sqrt{(IR)^2 + \left(I \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \\
 &= \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = I\sqrt{R^2 + X_C^2}.
 \end{aligned}
 \tag{9.10}$$

Из выражения (9.10) ток

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{U}{Z}.
 \tag{9.11}$$

Формула (9.11) выражает закон Ома в действующих значениях для цепи с последовательным соединением элементов  $R$  и  $C$ ;  $Z$  – полное сопротивление цепи  $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ .

Геометрическая интерпретация полного сопротивления представляет собой прямоугольный треугольник сопротивления, подобный треугольнику напряжений (рис. 9.18).

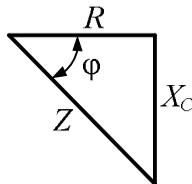


Рис. 9.18. Треугольник сопротивлений  $RC$ -цепи

По треугольнику сопротивлений можно получить ряд соотношений, используемых для решения многих вопросов.

Закон Кирхгофа для рассматриваемой цепи в комплексной форме

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_C = iR + i \left( -j \frac{1}{\omega C} \right),$$

откуда

$$i = \frac{\dot{U}}{R - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{\dot{U}}{R - jX_C} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}. \quad (9.12)$$

Выражение (9.12) представляет собой закон Ома в комплексной форме для цепи с последовательным соединением активного сопротивления и электрической емкости, где  $\underline{Z} = R - jX_C$  – комплекс полного сопротивления.

Рассмотрим энергетические соотношения в цепи с последовательным соединением  $R$  и  $C$ .

Мгновенная мощность в цепи

$$p = ui = U_m \sin(\omega t - \varphi) I_m \sin \omega t = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi).$$

Зависимость мгновенной мощности от времени построена на рисунке 9.19, изменяется по периодическому несинусоидальному закону с двойной частотой и, так же как и в цепи с реальной катушкой, имеет как положительные, так и отрицательные значения. Положительные – при одинаковом направлении напряжения и тока, отрицательные – при противоположном. Это значит, что и в  $RC$ -цепи, наряду с необратимым процессом преобразования электрической энергии в тепловую, идет обмен энергией генератора и энергией электрического поля цепи.

Активная мощность

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T ui = UI \cos \varphi.$$

Реактивная емкостная мощность

$$Q_C = U_C I = IX_C I = I^2 X_C.$$

---

---

Полная мощность

$$S = UI.$$

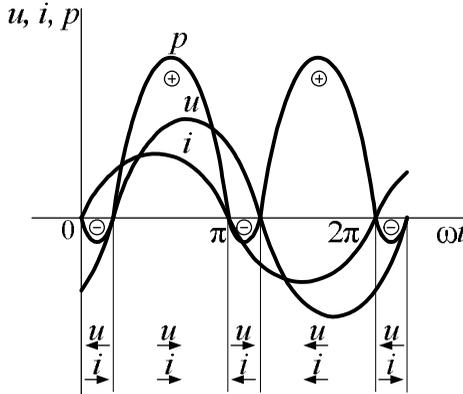


Рис. 9.19. Графики изменения напряжения, тока, мгновенной мощности

Активная, реактивная и полная мощности составляют треугольник мощностей, подобный треугольнику напряжений (рис. 9.20).

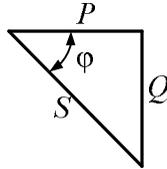


Рис. 9.20. Треугольник мощностей RC-цепи



### Вопросы и задачи для самоконтроля

1. Объясните, что понимают под индуктивным и емкостным сопротивлениями.
2. Запишите соотношение между мгновенными токами и напряжениями на участках цепи с активным сопротивлением  $R$ , индуктивным элементом  $L$ , емкостным элементом  $C$ .

3. Сформулируйте закон Ома для цепи синусоидального тока, запишите его формулу.

4. Сформулируйте законы Кирхгофа для цепи синусоидального тока в дифференциальной и комплексной формах.

5. Поясните, что понимают под углом сдвига фаз, от чего зависит его величина, как его определяют.

6. Объясните, что понимают под активной, реактивной и полной мощностью.

7. Запишите основные формулы по определению активной, реактивной и полной мощности, единицы их измерения.

8. Дайте определение коэффициента мощности. Как его рассчитывают?

9. Катушка с индуктивностью  $L$  и последовательно соединенным активным сопротивлением  $R$  подключена к источнику синусоидального напряжения с частотой  $f$ . Как изменится ток в цепи, если катушку подключить к источнику постоянного напряжения?

Ответ: ток увеличится. Объясните, почему.

10. Конденсатор емкостью  $C$  подключен к источнику синусоидального тока. Как изменится ток в цепи, если частоту: а) увеличить в 3 раза; б) уменьшить в 2 раза; в) если конденсатор подключить к источнику постоянного тока? Ответ: а) ток увеличится в 3 раза; б) ток уменьшится в 2 раза; в) ток будет равен нулю. Объясните, почему.

## 10. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

### 10.1. Неразветвленная цепь с активным сопротивлением, индуктивностью и емкостью

Пусть в ветви, состоящей из последовательно соединенных активного  $R$ , индуктивного  $L$  и емкостного  $C$  элементов, т. е. в последовательном контуре, или коротко  $RLC$ -цепи (рис. 10.1), ток изменяется по синусоидальному закону:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

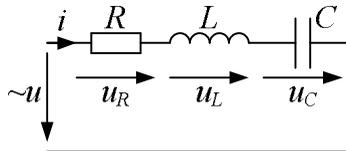


Рис. 10.1. Схема последовательного контура

На выводах этой цепи создается синусоидальное напряжение, равное алгебраической сумме синусоидальных напряжений на отдельных элементах в соответствии со вторым законом Кирхгофа:

$$u = u_R + u_L + u_C. \quad (10.1)$$

Напряжение  $u_R$  на сопротивлении  $R$  совпадает по фазе с током  $i$ :

$$u_R = Ri = RI_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Напряжение  $u_L$  на индуктивности  $L$  опережает ток  $i$  на угол  $\frac{\pi}{2}$ :

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \omega LI_m \cos(\omega t + \psi_i) = \omega LI_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right),$$

а напряжение  $u_C$  на емкости  $C$  отстает по фазе от тока  $i$  на угол  $\frac{\pi}{2}$ :

$$u_C = \frac{1}{C} \int idt = -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \psi_i) = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right).$$

На рисунке 10.2 показаны мгновенные значения тока в цепи и напряжений на отдельных ее элементах. Здесь имеет место случай, когда начальная фаза тока  $\psi_i > 0$ , а амплитуда напряжения на индуктивности больше амплитуды напряжения на емкости, т. е. индуктивное сопротивление  $X_L$  больше  $X_C$ . Как видно, напряжения на емкости и на индуктивности сдвинуты относительно друг друга по фазе на угол  $\pi$ , т. е. находятся в противофазе.

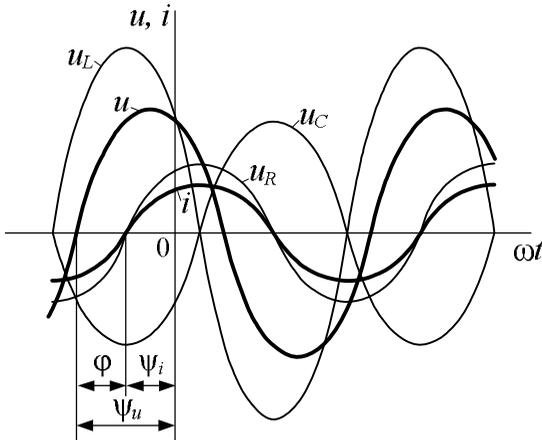


Рис. 10.2. Кривая мгновенных значений тока и напряжений в  $RLC$ -цепи

В соответствии с выражением (10.1) ординаты кривой напряжения  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$  равны алгебраической сумме ординат кривых  $u_R, u_L, u_C$ :

$$U_m \sin(\omega t + \psi_u) = RI_m \sin(\omega t + \psi_i) + \omega LI_m \cos(\omega t + \psi_i) - \frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \psi_i) = RI_m \sin(\omega t + \psi_i) + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m \cos(\omega t + \psi_i). \quad (10.2)$$

Уравнение (10.2) представляет собой тригонометрическую форму записи второго закона Кирхгофа для мгновенных напряжений. Входящую в него величину

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

называют *реактивным сопротивлением* цепи. В зависимости от знака реактивное сопротивление может иметь индуктивный ( $X > 0$ ) или емкостный ( $X < 0$ ) характер.

Определение напряжения  $u$  на входе цепи сводится к вычислению амплитуды  $U_m$  и начальной фазы  $\psi_u$ . Это можно сделать по графическим зависимостям (см. рис. 10.2).

Расчет удобнее произвести, воспользовавшись изображением синусоидальных величин, векторами, построив векторную диаграмму на основании второго закона Кирхгофа в векторной форме (рис. 10.3):

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C.$$

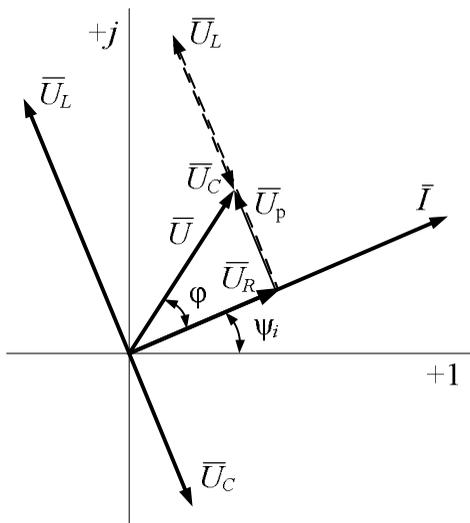


Рис. 10.3. Векторная диаграмма для RLC-цепи

Вектор падения напряжения на активном сопротивлении совпадает по направлению с вектором тока – активная составляющая напряжения. Вектор падения напряжения на индуктивности опережает вектор тока на  $90^\circ$  – индуктивная составляющая напряжения. Вектор падения напряжения на электрической емкости отстает от вектора тока на  $90^\circ$  – емкостная составляющая напряжения. Сложив векторы падений напряжений  $\bar{U}_R, \bar{U}_L, \bar{U}_C$  (см. рис. 10.3), получим вектор напряжения  $\bar{U}$ , приложенного к цепи.

Поскольку векторы индуктивного и емкостного напряжений находятся в противофазе, то результирующая их составляющая (действующее значение) будет  $U_{L-C} = U_L - U_C$ . Это так называемая реактивная составляющая общего приложенного напряжения.

Из векторной диаграммы (см. рис. 10.3) следует

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}.$$

Угол сдвига фаз  $\varphi$  между напряжением и током может быть определен следующим соотношением:

$$\varphi = \arctg \frac{U_L - U_C}{U_R}.$$

Тогда начальная фаза приложенного синусоидального напряжения

$$\psi_u = \varphi + \psi_i.$$

Согласно закону Ома,  $U = IR, U_L = I\omega L = IX_L, U_C = I \frac{1}{\omega C} = IX_C$ ,

поэтому

$$U = \sqrt{(IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2} = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \quad (10.3)$$

Из выражения (10.3) следует

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \quad (10.4)$$

Выражение (10.4) называют законом Ома для  $RLC$ -цепи. В знаменателе этого выражения находится полное сопротивление цепи, обозначаемое  $Z$ :

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 - X^2},$$

где  $X$  – результирующее реактивное сопротивление цепи.

Полное сопротивление цепи можно представить геометрически как прямоугольный треугольник сопротивлений (рис. 10.4), подобный треугольнику напряжений.

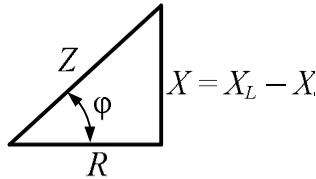


Рис. 10.4. Треугольник сопротивлений в  $RLC$ -цепи

Из треугольника сопротивлений следует, что угол сдвига фаз  $\varphi$  зависит от соотношения активных и реактивных сопротивлений:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_L - X_C}{R}.$$

Поскольку реактивное сопротивление  $X = X_L - X_C$ , то при  $X_L > X_C$  угол сдвига фаз  $\varphi > 0$  и цепь носит активно-индуктивный характер, часть индуктивного сопротивления компенсирует действие емкостного.

Если  $X_L < X_C$ , угол  $\varphi < 0$ , цепь носит активно-емкостный характер. Возможен случай, когда  $X_L = X_C$ , т. е. результирующее сопротивление  $X = 0$ . Тогда цепь имеет чисто активное сопротивление. Это случай, при котором имеет место явление, называемое *резонансом напряжения* (будет рассмотрено ниже).

Энергетические процессы в рассматриваемой цепи будут аналогичны тем, что происходят в  $RL$ -цепи или  $RC$ -цепи.

Активная мощность

$$P = UI \cos \varphi = I^2 R. \quad (10.5)$$

Реактивная мощность

$$Q = UI \sin \varphi = I^2 X = I^2 (X_L - X_C) = Q_L - Q_C. \quad (10.6)$$

Из выражения (10.6) следует, что реактивная мощность цепи есть алгебраическая сумма реактивных индуктивной и емкостной мощностей. Индуктивная мощность положительна, емкостная – отрицательна. Это следует из того, что напряжение на индуктивном элементе опережает ток по фазе на  $90^\circ$ , а напряжение на емкостном элементе отстает от тока на  $90^\circ$ .

Полная мощность

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (10.7)$$

По аналогии с полным сопротивлением можно составить прямоугольный треугольник полной мощности.

В общем случае цепь может состоять из любого числа последовательно соединенных элементов, обладающих активными и реактивными сопротивлениями.

Действующее значение напряжения на входе цепи определяется из прямоугольного треугольника, получаемого при построении векторной диаграммы. Одним катетом треугольника является активная составляющая напряжения  $U_a$ , равная арифметической сумме активных составляющих напряжений участков  $RLC$ -цепи,  $U_a = \sum U_{a_k}$ . Другим катетом – реактивная составляющая напряжений  $U_p$ , которая равна алгебраической сумме реактивных составляющих всех участков цепи:

$$U_p = \sum U_{L_k} - \sum U_{C_k}.$$

Таким образом, напряжение цепи

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} = \sqrt{(\sum U_{a_k})^2 + (\sum U_{L_k} - \sum U_{C_k})^2}.$$

Так как  $U_a = IR$ ;  $U_p = IX$ , то

$$U = \sqrt{(IR)^2 + (IX)^2} = \sqrt{(\sum IR_k)^2 + (\sum IX_{L_k} - \sum IX_{C_k})^2}$$

или

$$U = I\sqrt{R^2 + X^2} = I\sqrt{(\sum R_k)^2 + (\sum X_{L_k} - \sum X_{C_k})^2},$$

---

---

откуда полное сопротивление цепи

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{(\sum R_k)^2 + (\sum X_{L_k} - \sum X_{C_k})^2}.$$

Угол сдвига фаз определяется через

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{\sum X_{L_k} - \sum X_{C_k}}{\sum R_k}.$$

Активная, реактивная и полная мощности определяются по выражениям (10.5)–(10.7).

## 10.2. Основные понятия о резонансе в электрических цепях. Резонанс напряжений

В теории колебаний совпадение частоты вынужденных колебаний, сообщаемых извне физической системе, с частотой собственных колебаний этой системы называется *резонансом*.

В электрических цепях также возможны резонансные явления. Цепь, содержащая электрическую емкость и индуктивность, может являться колебательным контуром (рис. 10.5).

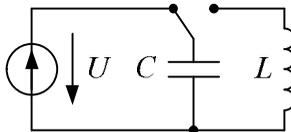


Рис. 10.5. Схема колебательного контура

Если конденсатор зарядить до некоторого напряжения  $U$ , а затем замкнуть на индуктивность  $L$ , то в контуре возникает постепенно увеличивающийся разрядный ток. По мере увеличения силы тока в магнитном поле индуктивности  $L$  накапливается энергия  $\frac{Li^2}{2}$ . Благодаря этому ток в контуре не прекращается, когда емкость конденсатора полностью разряжается, поскольку ЭДС самоиндукции противодействует уменьшению тока. Она поддерживает ток в том же направлении, в каком он протекал при разряде кон-

денсатора, но уже за счет энергии магнитного поля индуктивности. Этот ток для электрической емкости становится током, заряжающим ее в обратном направлении, т. е. в обкладке, имевшей вначале положительный заряд, теперь сообщается отрицательный заряд. Если в колебательном контуре нет потерь, перезарядка конденсатора будет продолжаться до тех пор, пока он не зарядится до первоначального напряжения  $U$ . При этом вся энергия из магнитного поля индуктивности вернется в электрическое поле конденсатора, после чего начнется разряд его на индуктивность при обратном направлении тока и т. д. В идеальном контуре (активное сопротивление контура  $R = 0$ ) эти колебания будут незатухающими.

Таким образом, колебания тока в рассматриваемом контуре связаны с периодическим преобразованием энергии электрического поля  $W_e = \frac{Cu^2}{2}$  в энергию магнитного поля  $W_m = \frac{Li^2}{2}$  и обратно.

Обмен энергиями происходит с некоторой частотой, которая называется *частотой свободных колебаний*, так как в цепи нет источника. Колебания, которые возникают под действием внешних сил, называются *вынужденными*. В электрических цепях к таким внешним силам относятся источники ЭДС и источники тока. При наличии колебательного контура и вынужденной силы в электрической цепи могут возникнуть резонансные явления. Характеризовать интенсивность колебаний можно по различным проявлениям, например по наибольшему возможному амплитудному значению напряжения на конденсаторе (амплитудный критерий).

Рассматривая электрические цепи с одним источником питания, в качестве критерия режима резонанса принимают совпадение по фазе тока и напряжения на входе электрической цепи. Это так называемый фазовый резонанс.

*Резонанс в электрической цепи* – явление, при котором разность фаз напряжения и тока на входе цепи равна нулю, хотя она содержит участки с индуктивными и емкостными элементами. То есть это режим работы электрической цепи, когда при наличии емкости и индуктивности входное реактивное сопротивление цепи или входная реактивная проводимость цепи равны нулю.

Электрический резонанс имеет большое практическое значение. Электрические резонансные контуры широко используются в

радиотехнике, измерительной технике, телеуправлении, различных схемах автоматики, рентгеноскопии. Явления резонанса применяются для изменения (компенсации) параметров линии электропередачи. То, что при резонансе токов колебания больших магнитных и электрических полей поддерживаются при относительно малом токе в неразветвленной цепи, широко используется для повышения коэффициента мощности промышленных установок.

Однако в некоторых случаях резонансные явления могут быть очень опасными как для жизни обслуживающего персонала, так и для целостности электрического оборудования. Особенно опасны резкие увеличения напряжения на реактивных элементах при резонансе напряжения: может нарушиться электрическая прочность изоляции конденсатора и катушки. Характерным примером служит включение кабельной линии на генераторное напряжение. Кабель обладает большой электрической емкостью, а генератор индуктивным сопротивлением, может создаться резонансный контур.

В простейших электрических цепях различают резонанс напряжений и резонанс токов.

Простейшая электрическая цепь, в которой может возникнуть резонанс напряжений, состоит из последовательно соединенных конденсатора и индуктивной катушки (рис. 10.6).

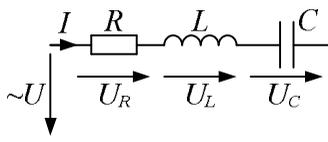


Рис. 10.6. Цепь последовательного соединения  $R, L, C$

Подключив колебательный контур к внешнему источнику, ЭДС которого изменяется по синусоидальному закону, можно возбудить вынужденные электрические колебания в цепи. При приближении частоты внешней ЭДС к частоте собственных колебаний колебательного контура резко возрастают амплитуды вынужденных колебаний тока и напряжений – в цепи возникает электрический резонанс.

Условие резонанса вытекает из определения резонанса. Так как для рассматриваемой цепи полное сопротивление

$$Z = \sum R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 = \sqrt{R^2 + X^2},$$

то для условия резонанса необходимо иметь реактивное сопротивление, равное нулю, т. е.

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0,$$

из чего следует, что *условием резонанса напряжений является равенство индуктивного и емкостного сопротивлений*:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}. \quad (10.8)$$

При равенстве индуктивного и емкостного сопротивлений полное сопротивление становится равным активному сопротивлению:  $Z = R$ , т. е. принимает минимальное из всех возможных значение, что приведет к максимальному значению тока. Ток в режиме резонанса будет ограничиваться только активным сопротивлением:

$$I_{\text{рез}} = \frac{U}{R}.$$

Напряжения на индуктивном и емкостном элементах будут равны, но противоположны по фазе, причем эти напряжения могут достигать достаточно больших значений (при малом активном сопротивлении цепей) и превышать напряжение источника, поэтому резонанс в рассматриваемой цепи носит название *резонанса напряжений*. Ток и напряжение на входе цепи совпадают по фазе (рис. 10.7),  $\varphi = 0$ , а  $\cos \varphi = 1$ .

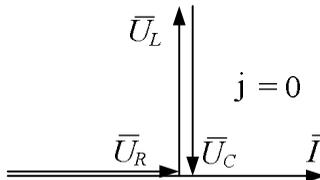


Рис. 10.7. Векторная диаграмма при резонансе напряжений

---

---

Из условия резонанса напряжений можно определить угловую частоту  $\omega_0$ , при которой наступает резонанс при неизменных параметрах  $L$  и  $C$ ,  $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ , отсюда

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Угловая частота  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  есть частота собственных колебаний последовательного колебательного контура. Следовательно, можно получить резонанс напряжения, изменяя частоту вынужденных колебаний, т. е. частоту источника ЭДС, либо изменяя параметры колебательного контура  $L$  и  $C$ .

Перенапряжения на элементах электрической цепи при резонансе возможны, когда активное сопротивление  $R$  меньше индуктивного:  $R < \omega L$ , а следовательно, и емкостного:  $R < \frac{1}{\omega C}$ . Поскольку при резонансе напряжение источника  $U = IR$ , то при выше принятых условиях

$$U = IR < U_L = I\omega_0 L; \quad (10.9)$$

$$U = IR < U_C = I \frac{1}{\omega_0 C}. \quad (10.10)$$

Подставив в неравенства (10.9) и (10.10)  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , получим одно общее условие возникновения повышенных напряжений:

$$R < \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (10.11)$$

Величина  $\sqrt{\frac{L}{C}}$  имеет размерность сопротивления, она именуется *характеристическим или волновым сопротивлением колебательного контура* и обозначается  $\rho$ .

Отношение волнового сопротивления к активному сопротивлению колебательного контура характеризует важные резонансные свойства контура и называется *добротностью контура*:

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\sqrt{L}}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{C}}.$$

Добротность контура показывает, во сколько раз резонансные индуктивные и емкостные напряжения больше входного напряжения.

Подбор параметров цепи с целью получить в цепи резонанс называют *настройкой цепи в резонанс*.

При резонансе  $\omega$ ,  $L$  и  $C$  связаны соотношением, вытекающим из условия резонанса напряжений (10.8):  $\omega^2 LC = 1$ . Таким образом, настройку цепи в резонанс можно осуществить по-разному. Например, меняя угловую частоту  $\omega$  источника энергии при неизменных  $L$  и  $C$ , меняя индуктивность  $L$  при неизменных  $\omega$  и  $C$ , меняя емкость  $C$  при неизменных  $\omega$  и  $L$  и т. д.

Так как при резонансе напряжения  $U_C$  и  $U_L$  равны по величине и находятся в противофазе, то в любой момент времени равны по величине и противоположны по знаку мгновенные мощности на элементах  $L$  и  $C$ , т. е.

$$p_L = -p_C.$$

Поэтому накопление энергии магнитного поля происходит только за счет энергии электрического поля, и наоборот. Вся энергия, получаемая цепью от генератора, преобразуется в теплоту в активном сопротивлении.

### 10.3. Параллельное соединение элементов в цепи

Исследуем цепь с параллельным соединением двух ветвей, подключенных к источнику синусоидального напряжения  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$  (рис. 10.8). Пусть начальная фаза источника напряжения будет равна нулю ( $\psi_u = 0$ ). Тогда начальная фаза тока

в неразветвленной части схемы, в первой и второй ветвях будет  $\varphi = \psi_u = \psi_i = -\psi_i$ . Соответственно  $\varphi_1 = -\psi_{i_1}$  и  $\varphi_2 = -\psi_{i_2}$ .

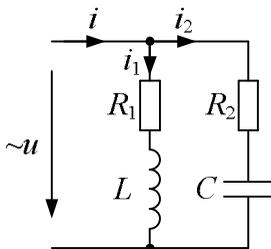


Рис. 10.8. Цепь с параллельным соединением ветвей

С учетом того, что ток в первой ветви имеет активно-индуктивный характер, его мгновенное значение будет иметь следующее выражение:  $i_1 = I_{m_1} \sin(\omega t - \varphi_1)$ , т. е. начальная фаза тока отстает от начальной фазы напряжения. Во второй ветви ток является активно-емкостным, и его мгновенное значение будет иметь выражение  $i_2 = I_{m_2} \sin(\omega t - \varphi_2)$ . Здесь начальная фаза этого тока опережает начальную фазу напряжения. Поэтому она записана со знаком «+».

Действующие значения токов определяем из следующих выражений:

для первой ветви

$$I_1 = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + X_L^2}}, \quad \cos \varphi_1 = \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + X_L^2}};$$

для второй ветви

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + X_C^2}}, \quad \cos \varphi_2 = \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + X_C^2}}.$$

Зная действующие значения токов в ветвях, нельзя определить его действующее значение  $I$  в неразветвленной части цепи простым сложением токов  $I_1$  и  $I_2$ , так как необходимо учитывать их

фазовые углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Поэтому ток  $I$  определяют как геометрическую сумму токов в ветвях, для чего следует построить векторную диаграмму токов (рис. 10.9).

За основной вектор примем вектор напряжения  $\bar{U}$ . Векторы токов  $\bar{I}_1$  и  $\bar{I}_2$  изображаем с учетом углов сдвига фаз  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Вектор тока в неразветвленной части цепи получаем путем суммирования векторов  $\bar{I}_1$  и  $\bar{I}_2$ .

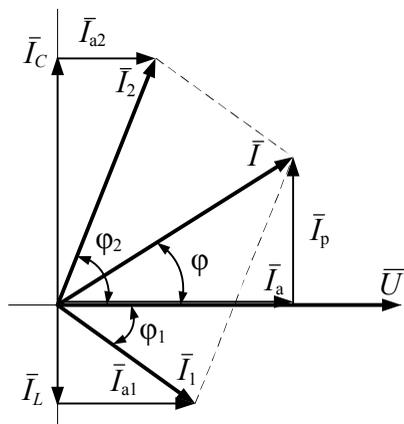


Рис. 10.9. Векторная диаграмма токов

Значение тока  $I$  в неразветвленной части цепи можно определить аналитически, для чего вводят понятия активной и реактивной составляющих тока для ветви с последовательным соединением активных и реактивных элементов.

Для первой ветви с элементами  $R_1L$

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_{a1(R_1)} + \bar{I}_{p1(L)} \quad \text{или} \quad \bar{I}_1 = \bar{I}_{a1} + \bar{I}_{p1}.$$

Активная составляющая  $I_{a1}$  совпадает по фазе с напряжением (см. рис. 10.9) и определяется как

$$I_{a1} = I_1 \cos \varphi_1 = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + X_L^2}} \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + X_L^2}} = U \frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2} = U g_1,$$

---

---

где  $X_L = \omega L$  – индуктивное сопротивление, Ом;

$g_1$  – активная проводимость первой ветви, См:

$$g_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2}. \quad (10.12)$$

Следует обратить внимание на то, как определяется активная проводимость ветви. Она не является величиной, обратной активному сопротивлению ветви  $R_1$ . Активная проводимость рассматриваемой ветви – это отношение активного сопротивления ветви к квадрату полного сопротивления ветви (10.12).

Реактивная составляющая тока  $I_{p1}$  отстает по фазе от напряжения на  $90^\circ$  и определяется как

$$I_{p1} = I_1 \sin \varphi_1 = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + X_L^2}} \frac{X_L}{\sqrt{R_1^2 + X_L^2}} = U \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = U b_L,$$

где

$$b_L = \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2}, \quad (10.13)$$

$b_L$  – реактивная (индуктивная) проводимость первой ветви, См.

Как видно из выражения (10.13), реактивная проводимость не является величиной, обратной индуктивному сопротивлению. Она определяется как отношение индуктивного сопротивления ветви к квадрату полного сопротивления ветви.

Аналогично и ток второй ветви можно представить как состоящий из активной  $I_{a2}$  и реактивной  $I_{p2}$  составляющих:

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_{a2(R_2)} + \bar{I}_{p2(C)} \quad \text{или} \quad \bar{I}_2 = \bar{I}_{a2} + \bar{I}_{p2},$$

где

$$I_{a2} = I_2 \cos \varphi_2 = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + X_C^2}} \frac{R_2}{\sqrt{R_1^2 + X_C^2}} = U \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2} = U g_2;$$

$$g_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2} \quad \text{– активная проводимость второй ветви, См;}$$

$X_C = \frac{1}{\omega C}$  – реактивное (емкостное) сопротивление второй ветви, Ом;

$$I_{p2} = I_2 \sin \varphi_2 = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + X_C^2}} \frac{X_C}{\sqrt{R_1^2 + X_C^2}} = U \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = Ub_C.$$

Активная составляющая тока в неразветвленной части цепи  $I_a$  равна сумме активных составляющих токов первой  $I_{a1}$  и второй  $I_{a2}$  ветвей (обе составляющие совпадают по фазе с напряжением):

$$I_a = I_{a1} + I_{a2} = U(g_1 + g_2).$$

Реактивная составляющая тока первой ветви отстает по фазе от напряжения на  $90^\circ$ , а второй – опережает на  $90^\circ$ , т. е. ветви находятся в противофазе. Следовательно, реактивная составляющая тока в неразветвленной части цепи равна разности реактивных составляющих:

$$I_p = I_{p2(C)} - I_{p1(L)} \quad \text{или} \quad I_p = I_{p2} - I_{p1} = (b_C - b_L)U = bU.$$

Действующее значение полного тока в неразветвленной части цепи можно определить как

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = U\sqrt{g^2 + b^2} = UY, \\ Y = \sqrt{g^2 + b^2}, \quad (10.14)$$

где  $Y$  – полная проводимость цепи, См.

*Активная, реактивная и полная проводимости* измеряются в сименсах (См).

На основании выражения (10.14) можно построить треугольник проводимостей (рис. 10.10), из которого получают ряд соотношений:  $g = Y \cos \varphi$ ;  $b = Y \sin \varphi$ ;  $\varphi = \arctg \frac{b}{g}$  и др.

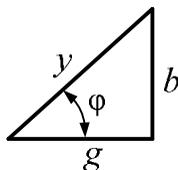


Рис. 10.10. Треугольник проводимостей

Если реактивная составляющая  $I_p = I_{p2(C)} - I_{p1(L)}$ , то при  $I_{p1} > I_{p2}$  полный ток  $I$  будет отставать по фазе от напряжения на угол  $\varphi$  ( $-90^\circ \leq \varphi \leq 0$ ). Если  $I_{p1} < I_{p2}$ , то полный ток будет опережать по фазе напряжение на угол, который может иметь значения  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ ).

Особое внимание заслуживает тот случай, когда  $I_{p1} = I_{p2}$ , т. е. реактивная составляющая полного тока равна нулю. В этом случае в цепи наблюдается резонанс токов.

**Пример 10.1.** Определить токи в ветвях электрической цепи (рис. 10.11), если  $U = 100$  В,  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 6$  Ом,  $R_3 = 4$  Ом,  $X_L = 8$  Ом,  $X_C = 3$  Ом.

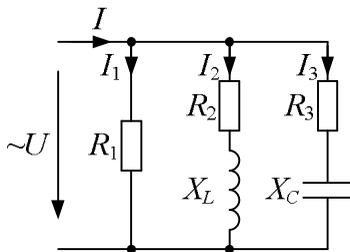


Рис. 10.11

**Решение.** Токи в параллельных ветвях определяем по закону Ома для участка электрической цепи:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{100}{10} = 10 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + X_L^2}} = \frac{100}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = 10 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U}{\sqrt{R_3^2 + X_C^2}} = \frac{100}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 20 \text{ А.}$$

Ток  $I$  в неразветвленной части цепи определяем по закону Ома для цепи:  $I = UY$ . Здесь  $Y = \sqrt{g^2 + b^2}$ .

Активная проводимость  $g$  цепи, равная арифметической сумме активных проводимостей параллельных ветвей  $g_1, g_2, g_3$ :

$$g_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ См;}$$

$$g_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + X_L^2} = \frac{6}{6^2 + 8^2} = 0,06 \text{ См;}$$

$$g_3 = \frac{R_3}{R_3^2 + X_C^2} = \frac{4}{4^2 + 3^2} = 0,16 \text{ См;}$$

$$g = g_1 + g_2 + g_3 = 0,1 + 0,06 + 0,16 = 0,32 \text{ См.}$$

Реактивная проводимость  $b$  цепи равна алгебраической сумме реактивных проводимостей параллельных ветвей. В первой ветви отсутствует реактивное сопротивление, значит,  $b_1 = 0$ . Тогда

$$b = b_3 - b_2;$$

$$b_2 = \frac{X_L}{R_2^2 + X_L^2} = \frac{8}{6^2 + 8^2} = 0,08 \text{ См;}$$

$$b_3 = \frac{X_C}{R_3^2 + X_C^2} = \frac{3}{4^2 + 3^2} = 0,12 \text{ См;}$$

$$b = b_3 - b_2 = 0,12 - 0,08 = 0,04 \text{ См.}$$

Полная проводимость

$$Y = \sqrt{g^2 + b^2} = \sqrt{0,32^2 + 0,04^2} = 0,322 \text{ См.}$$

Ток в неразветвленной части цепи

$$I = UY = 100 \cdot 0,322 = 32,2 \text{ А.}$$

#### 10.4. Резонанс токов

Резонанс токов возможен в цепи синусоидального напряжения, состоящей из двух ветвей, обладающих индуктивностью и емкостью (рис. 10.12).

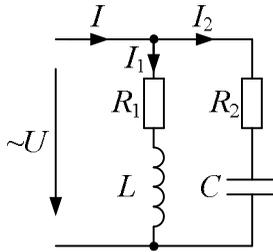


Рис. 10.12. Схема параллельного колебательного контура

Такую цепь иногда называют параллельным колебательным контуром. Резонанс в такой цепи наступит, когда общая реактивная проводимость цепи будет равна нулю:

$$b = b_C - b_L = 0,$$

из чего следует, что условием резонанса будет являться равенство емкостной и индуктивной проводимостей:  $b_C = b_L$ .

Реактивная (индуктивная) проводимость первой ветви

$$\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = b_L.$$

Реактивная (емкостная) проводимость второй ветви

$$\frac{1}{\omega C} \frac{1}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = b_C.$$

Таким образом, в цепи (см. рис. 10.12) резонанс тока наступит при условии, что

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = \frac{1}{\omega C} \frac{1}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (10.15)$$

Поскольку реактивные проводимости ветвей равны, то индуктивная составляющая тока  $I_L$  первой ветви будет равна емкостной

составляющей тока  $I_C$  второй ветви, и токи находятся в противофазе (рис. 10.13), поэтому резонанс в рассматриваемой цепи называется *резонансом токов*.

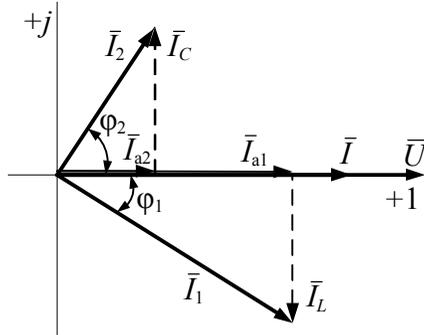


Рис. 10.13. Векторная диаграмма в режиме резонанса токов

При равенстве емкостной и индуктивной проводимостей полная проводимость цепи будет равна сумме активных проводимостей ветвей:

$$Y = g_1 + g_2 = g.$$

Угол сдвига фаз  $\varphi$  на входе цепи равен нулю. Согласно закону Ома,  $I = UY$ , следовательно, в режиме резонанса токов ток на входе цепи зависит от суммарной активной проводимости ветвей:  $g = g_1 + g_2$ , т. е.  $I = Ug$ , в результате ток на входе цепи принимает минимальное значение. Токи в ветвях превышают ток на входе. Частоту, при которой может возникнуть резонанс токов, определим из условия резонанса (10.15):

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = \frac{1}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

После математических преобразований (умножения на общий знаменатель)

$$R_1^2 + (\omega L)^2 = \omega^2 LC \left[ R_2^2 + \left( \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right].$$

Далее, раскрыв скобки, сгруппируем слагаемые с  $\omega$ :

$$\omega^2 (L^2 - R_2^2 LC) = \frac{L}{C} - R_1^2, \quad (10.16)$$

затем умножим правую и левую части уравнения (10.16) на  $\frac{1}{LC}$ :

$$\omega^2 \left( \frac{L}{C} - R_2^2 \right) = \frac{1}{LC} \left( \frac{L}{C} - R_1^2 \right).$$

Поскольку  $\sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$  – волновое сопротивление, а  $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$  – собственная частота последовательного колебательного контура, то окончательная формула для резонансной частоты параллельного контура примет следующий вид:

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}. \quad (10.17)$$

Поскольку угловая частота выражается действительным числом, то из выражения (10.17) следует, что резонанс токов возможен в том случае, если  $R_1 > \rho$  и  $R_2 > \rho$  или  $R_1 < \rho$  и  $R_2 < \rho$ . Если  $R_1 = R_2$ , то резонансная частота не зависит от активного сопротивления:  $\omega_{\text{рез}} = \omega_0$ . Если же  $R_1 = R_2 = \rho$ , то под знаком радикала имеет место неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ . Это случай так называемого *безразличного резонанса*.

Резонанс токов наблюдается при любой частоте, поскольку эквивалентное сопротивление становится активным, не зависящим от частоты. В технике связи используются контуры, у которых  $R_1$  и  $R_2$  значительно меньше  $\rho$ . Для таких высокочастотных контуров, если пренебречь  $R_1$  и  $R_2$ , резонансная частота  $\omega_{\text{рез}}$  равна собственной частоте  $\omega_0$  последовательного колебательного контура.

Параллельный колебательный контур в резонансе токов можно настроить изменением параметров контура  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L$ ,  $C$  или частоты напряжения источника.

При резонансе токов колебание больших энергий магнитного и электрического полей поддерживается при относительно малом токе в неразветвленной части цепи. Колебания происходят внутри колебательного контура без вовлечения (в идеальном случае) внешнего источника. Это очень важная особенность используется для компенсации угла сдвига фаз.

**Пример 10.2.** К источнику переменного напряжения с частотой  $f = 1000$  Гц и напряжением  $U = 100$  В подключена катушка, обладающая индуктивностью  $L = 0,08$  Гн и активным сопротивлением  $R = 200$  Ом. Параллельно катушке включен конденсатор переменной емкости. Определить значение емкости конденсатора, при которой в цепи наступит резонанс токов, а также токи в ветвях.

**Решение.** Условием резонанса токов является  $b_L = b_C$ :

$$b_L = \frac{X_L}{R^2 + X_L^2},$$

где  $X_L = \omega L = 2\pi fL = 2 \cdot 3,14 \cdot 1000 \cdot 0,08 = 500$  Ом;

$$b_L = \frac{500}{200^2 + 500^2} = 0,00172 \text{ См.}$$

Ввиду отсутствия в ветви с емкостью активного сопротивления емкостная проводимость

$$b_C = \frac{1}{X_C} = \omega C.$$

Из условия резонанса токов  $b_L = b_C$  будем иметь  $\omega C = 0,00172$  См, тогда емкость конденсатора, при которой наступит резонанс токов,

$$C = \frac{0,00172}{2 \cdot 3,14 \cdot 1000} = 2,7 \text{ мкФ.}$$

Ток в первой ветви (с катушкой)

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{100}{\sqrt{200^2 + 500^2}} = 0,186 \text{ А.}$$

---

---

Ток во второй ветви (с емкостью)

$$I_2 = Ub_C = 100 \cdot 0,00172 = 0,172 \text{ А.}$$

Ток в неразветвленной части цепи  $I$  будет зависеть только от активной проводимости цепи  $g$ , так как реактивная  $b = b_C - b_L = 0$ :

$$g = g_1 = \frac{R}{R^2 + X_L^2} = \frac{200}{200^2 + 500^2} = 0,00069 \text{ См;}$$

$$I = Ug = 100 \cdot 0,00069 = 0,069 \text{ А.}$$

### 10.5. Коэффициент мощности

Отношение активной мощности  $P$  к полной  $S$  называют *коэффициентом мощности*. В цепях синусоидального напряжения он численно равен  $\cos \varphi$  и показывает, какую долю всей вырабатываемой источником мощности составляет активная мощность.

Большинство потребителей электрической энергии представляют собой электромагнитные механизмы, в которых переменный ток индуцирует реактивные ЭДС, обуславливающие сдвиг по фазе между током и напряжением, вследствие чего коэффициент мощности  $\cos \varphi < 1$ .

При низком коэффициенте мощности имеет место неудовлетворительное использование установленной активной мощности электрических приемников. Повышение коэффициента мощности важно с экономической стороны. Поскольку ток в линии

$$I_{\text{л}} = \frac{P_{\text{н}}}{U \cos \varphi}, \text{ то при неизменных активной мощности } P_{\text{н}} = \text{const} \text{ и}$$

напряжении источника  $U = \text{const}$  с повышением коэффициента мощности  $\cos \varphi$  уменьшается ток линии, а это приведет к уменьшению потерь мощности в линии  $\Delta P_{\text{л}} = I_{\text{л}}^2 R_{\text{л}}$ , где  $R_{\text{л}}$  – активное сопротивление проводов линии (см. пример 10.3). Как правило, крупным потребителям электрической энергии электроснабжающие организации задают средневзвешенное значение коэффициента мощности, обеспечение которого контролируется, и невыполнение его оборачивается применением штрафных санкций. Коэффи-

коэффициент мощности электроэнергетических систем достаточно высок:  $\cos \varphi = 0,9-0,95$ .

Для повышения коэффициента мощности проводится ряд мероприятий: заменяются недостаточно нагруженные двигатели двигателями меньшей мощности, ограничивается работа их на холостом ходу, применяются компенсирующие устройства и т. д.

Эффективным способом достижения этой цели, наряду с другими, является применение компенсирующих устройств, в частности, параллельное подключение к приемнику с низким коэффициентом мощности конденсаторов. В таком случае энергия в магнитном поле приемника частично или полностью накапливается за счет энергии электрического поля конденсатора и наоборот, а генератор и провода линии разгружаются от обменной энергии, что позволяет лучше использовать установленную мощность, т. е. увеличить активную мощность, развиваемую генераторами.

С увеличением емкости ток конденсатора  $I_C = \omega CU$  увеличивается так, что при некоторой емкости он может стать равным индуктивной составляющей тока приемника  $I$  (режим резонанса тока). В этом случае произойдет полная компенсация сдвига фаз. Ток линии будет минимальным, равным активной составляющей тока приемника  $I_a$ . При дальнейшем увеличении емкости  $I_C$  станет больше  $I$ , что приведет к росту тока линии. Наступает режим перекомпенсации. На рисунке 10.14 показано, как изменяется ток линии  $I_L$  и  $\cos \varphi$  при изменении параллельно подключаемой емкости конденсатора  $C$  при  $P = \text{const}$  и  $U = \text{const}$ . На рисунке 10.14  $C_n$  – емкость полной компенсации.

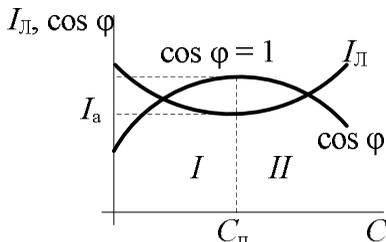


Рис. 10.14. Зависимость тока линии и коэффициента мощности от емкости:  
 $I$  – область недокомпенсации;  $II$  – область перекомпенсации

---

---

Для обеспечения заданного значения коэффициента мощности необходимо рассчитать требуемую емкость конденсатора. Если электроприемники имеют мощность  $P = \text{const}$  и коэффициент мощности  $\cos \varphi_1$ , то их реактивная индуктивная мощность  $Q_1 = P \operatorname{tg} \varphi_1$ . При заданном значении  $\cos \varphi_2$  ( $\cos \varphi_1 > \cos \varphi_2$ ) реактивная мощность должна быть  $Q_2 = P \operatorname{tg} \varphi_2$ .

Разность реактивных мощностей  $Q_1 - Q_2$  компенсируется емкостной реактивной мощностью конденсаторов:

$$Q_C = Q_1 - Q_2 = P(\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2).$$

Реактивную мощность конденсаторов можно также определить по формуле

$$Q_C = b_C U^2 = \omega C U^2.$$

Приравняв правые части уравнений (10.10) и (10.11), определяем емкость конденсаторов:

$$C = \frac{P(\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2)}{\omega U^2}. \quad (10.18)$$

Подключение конденсаторов для компенсации сдвига фаз осуществляется в месте ввода линии питания в распределительное устройство. Экономически выгодно, как следует из формулы (10.18), подключать конденсаторы на возможно более высокое напряжение. Угол сдвига фаз обычно доводят до величины, при которой  $\cos \varphi = 0,9-0,95$ .

**Пример 10.3.** Коэффициент мощности приемника энергии повышают с 0,7 до 0,91. Потери мощности в двухпроводной линии передачи равны 8 % от мощности приемника (при  $\cos \varphi = 0,7$ ). На сколько процентов можно увеличить активную мощность при передаче энергии с той же потерей мощности в линии, но при повышении  $\cos \varphi$  до 0,91? Сколько процентов будут составлять потери мощности, если активную мощность приемника не увеличивать при повышении  $\cos \varphi$  до 0,91?

**Решение.** Выразим потери мощности в линии:

$$\Delta P = 2RI^2,$$

где  $R$  – сопротивление одного провода линии;

$I$  – ток в проводах линии.

Поскольку ток должен оставаться неизменным, тогда его можно выразить из формулы мощности:

$$I = \frac{P_1}{U \cos \varphi_1} = \frac{P_2}{U \cos \varphi_2}$$

(здесь индекс 1 относится к режиму до компенсации, индекс 2 – после увеличения коэффициента мощности).

Следовательно, после повышения  $\cos \varphi$  мощность приемника может иметь значение

$$P_2 = P_1 = \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} = P_1 \frac{0,91}{0,7} = 1,3P_1,$$

т. е. повысив коэффициент мощности, активную мощность приемников можно увеличить на 30 % путем присоединения новых приемников энергии.

Если активную мощность приемников оставить прежней:

$$P = UI_1 \cos \varphi_1 = UI_2 \cos \varphi_2, \quad (10.19)$$

то в результате повышения коэффициента мощности ток в проводах линии уменьшится.

Действительно, из выражения (10.19)

$$I_2 = I_1 \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} = I_1 \frac{0,7}{0,91} = 0,77I_1.$$

В формулу потери мощности в линии этот ток входит в квадрате:

$$\Delta P = 2RI^2;$$

$$\Delta P_2 = 2RI_2^2 = 2R(0,77I_1)^2.$$

Новая величина потери мощности в линии составляет от прежней

$$\frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} = (0,77)^2 = 0,59,$$

поэтому  $\Delta P_2 = 0,59 \cdot 8 = 4,72$  %, т. е. потери мощности в линии уменьшатся с 8 % от мощности приемников до 4,72 %.



### Вопросы и задачи для самоконтроля

1. Приведите примеры построения векторных диаграмм синусоидальных напряжений и тока при последовательном соединении  $R$  и  $L$ ,  $R$  и  $C$ ,  $L$  и  $C$ .

---

2. Постройте графики мгновенной мощности в цепи синусоидального тока для различных значений сдвига фаз между напряжением и током.

3. Поясните, как используют при расчете электрических цепей прямоугольный треугольник сопротивлений, треугольник проводимостей.

4. Запишите формулу для расчета активной мощности. Назовите, в каких единицах измеряется активная мощность.

5. Дайте определения полной мощности, коэффициента мощности.

6. Расскажите, что такое резонанс напряжений, резонанс токов. Объясните условия возникновения резонанса напряжений, резонанса токов в электрической цепи.

7. Объясните, как определяются волновое сопротивление, добротность колебательного контура.

8. Приведите примеры компенсации угла сдвига фаз в цепи с низким коэффициентом мощности.

9. Определите действующее значение тока в цепи с последовательно соединенными резистором  $R = 4$  Ом и конденсатором, реактивное сопротивление которого  $X_C = 3$  Ом. К электрической цепи приложено синусоидальное напряжение  $U = 25$  В. Ответ: 5 А.

10. В цепи переменного тока с последовательным соединением элементов  $R$  и  $L$  измерены напряжение на входе  $U = 100$  В, ток  $I = 5$  А, мощность  $P = 300$  Вт. Определите сопротивление  $X_L$  (Ом). Ответ: 16 Ом.

11. В электрической цепи последовательно соединены резистор  $R = 6$  Ом, катушка индуктивности и конденсатор, реактивные сопротивления которых  $X_L = 12$  Ом,  $X_C = 4$  Ом. Если на входе электрической цепи синусоидальное напряжение, действующее значение которого  $U = 80$  В, то какое действующее напряжение на конденсаторе? Ответ: 32 В.

12. В электрической цепи (рис. 10.15) имеет место резонанс. Действующее значение синусоидального напряжения источника питания  $U = 100$  В,  $R = 10$  Ом,  $X_C = 10$  Ом. Определите величину сопротивления  $X_L$ , ток и напря-

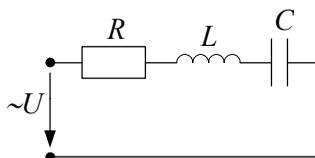


Рис. 10.15

жения на участках цепи, постройте векторную диаграмму напряжений и токов. Ответ: 10 Ом; 10 А;  $U_R = U_L = U_C = 100$  В.

13. В электрической цепи имеет место резонанс (рис. 10.16). Действующее значение синусоидального напряжения источника питания  $U = 100$  В,  $R = 10$  Ом,  $X_C = 20$  Ом. Определите величину сопротивления  $X_L$ , токи на участках цепи, постройте векторную диаграмму напряжения и токов. Ответ: 10 Ом; 5 А; 7,05 А; 5 А.

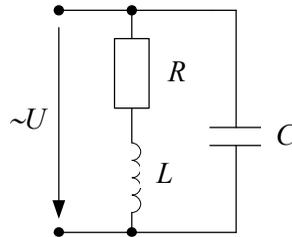


Рис. 10.16

## **11. СИМВОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД**

---

### **11.1. Основные понятия о символическом методе расчета электрических цепей синусоидального тока**

Расчет разветвленных цепей при смешанном соединении элементов, а также сложных цепей синусоидального напряжения обычно осуществляется символическим методом, основанным на представлении синусоидальной функции комплексным числом. Это объясняется тем, что классический метод расчета приводит к громоздким интегрально-дифференциальным уравнениям и требует большого объема тригонометрических преобразований. Символический метод позволяет тригонометрические преобразования и геометрические операции над векторами свести к алгебраическим операциям над комплексными числами, что существенно упрощает расчет и позволяет его вести с любой степенью точности. При этом могут быть использованы все методы преобразования и анализа электрических цепей, изложенные в главе 4.

В линейных цепях синусоидального тока амплитуды токов и напряжений или их действующие значения при заданной начальной фазе определяются однозначно их комплексными амплитудами или комплексными действующими значениями. При использовании символического метода расчета необходимо все законы цепей (закон Ома, законы Кирхгофа) применять в комплексной форме. Возможности символического метода рассмотрим на примере расчета простой цепи со смешанным соединением элементов и сложной цепи.

### **11.2. Расчет цепей синусоидального тока со смешанным соединением элементов**

Расчет простых цепей, как правило, ведут методом преобразования схем, при помощи которых удается свести схему разветв-

ленной электрической цепи к простейшей и воспользоваться законом Ома.

Одним из основных видов преобразования электрических схем, часто применяемых на практике, является преобразование схемы со смешанным соединением элементов, которое представляет собой сочетание более простых соединений – последовательного и параллельного.

При последовательном соединении приемников (рис. 11.1) образуется одна ветвь и через все их сопротивления проходит один и тот же ток  $\dot{I}$ .

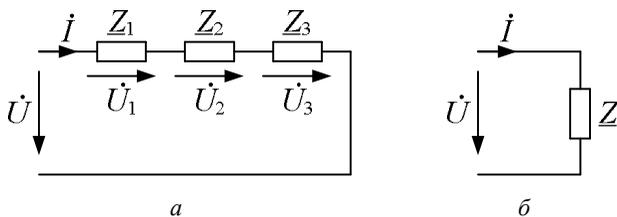


Рис. 11.1. Последовательное соединение приемников (а) и схема эквивалентной цепи (б)

На каждом приемнике  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$  будут создаваться падения напряжения  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{U}_2$ ,  $\dot{U}_3$ . В соответствии со вторым законом Кирхгофа в комплексной форме

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 = \sum \dot{U}_k,$$

или

$$\dot{U} = \dot{I}Z_1 + \dot{I}Z_2 + \dot{I}Z_3 = \dot{I}(Z_1 + Z_2 + Z_3) = \dot{I}\sum Z_k,$$

где  $Z_k = R_k + jX_k$ .

Таким образом, при последовательном соединении приемников эквивалентное комплексное сопротивление всей цепи  $Z$  равно алгебраической сумме комплексных сопротивлений отдельных участков цепи, т. е.

$$Z = \sum Z_k = \sum R_k + j\sum X_k = R + jX,$$

где  $R = \sum R_k$ ;  $X = \sum X_k$ .

Значит, исходную схему (рис. 11.1, а) можно преобразовать в более простую эквивалентную схему (рис. 11.1, б). Ток в электрической цепи определяют по закону Ома:

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}.$$

**Пример 11.1.** Для электрической цепи (рис. 11.2) определить ток и падения напряжений на приемниках, если напряжение  $u = 141 \sin \omega t$ ,  $R = 6$  Ом,  $X_L = 8$  Ом. Построить векторную диаграмму напряжений и тока.

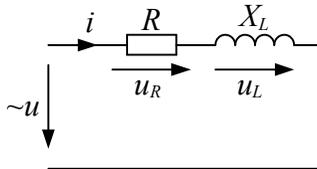


Рис. 11.2. Последовательное соединение активного и индуктивного сопротивлений

**Решение.** Расчет удобно вести символическим методом. Комплексное действующее напряжение источника

$$\dot{U} = U e^{j\psi_U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_U},$$

где  $\psi_U$  – начальная фаза приложенного к цепи напряжения.

Из условия задачи видно, что  $\psi_U = 0$ . Если начальная фаза напряжения не задана, а известно действующее значение напряжения, то в этом случае можно принять его начальную фазу равной нулю и для этого момента времени рассчитать цепь. Итак, для нашего примера

$$\dot{U} = \frac{141}{\sqrt{2}} e^{j0} = 100 \text{ В.}$$

Комплексное эквивалентное сопротивление цепи

$$\underline{Z} = R + jX_L = 6 + j8 \text{ Ом.}$$

По закону Ома комплексное значение тока в цепи

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{100}{6 + j8} = \frac{100(6 - j8)}{(6 + j8)(6 - j8)} = \frac{100(6 - j8)}{100} = 6 - j8 \text{ А.}$$

Действующее значение тока  $I = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$  А.

Падение напряжения на активном сопротивлении

$$\dot{U}_R = \dot{I}R = (6 - j8)6 = 36 - j48 \text{ В}; \quad U = \sqrt{36^2 + 48^2} = 60 \text{ В}.$$

Падение напряжения на индуктивном сопротивлении

$$\dot{U}_L = jX_L \dot{I} = j8(6 - j8) = 64 + j48 \text{ В}; \quad U_L = \sqrt{64^2 + 48^2} = 80 \text{ В}.$$

Векторную диаграмму (рис. 11.3) строим в такой последовательности. На комплексной плоскости в масштабе откладываем вектор тока  $\dot{I}$ . Вектор напряжения  $\dot{U}_R$  в масштабе строим совпадающим по направлению с током  $\dot{I}$ , а вектор напряжения  $\dot{U}_L$  — опережающим ток  $\dot{I}$  на  $90^\circ$ . Просуммировав векторы в соответствии со вторым законом Кирхгофа, получим вектор напряжения источника, т. е.  $\dot{U}_R + \dot{U}_L = \dot{U}$ .

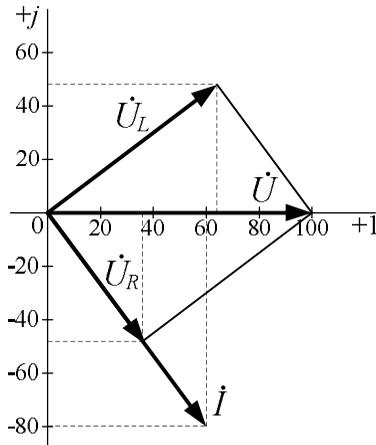


Рис. 11.3. Векторная диаграмма напряжений

При параллельном соединении (рис. 11.4, а) ветви присоединены к двум узлам и напряжение  $\dot{U}$  на всех ветвях одинаковое.

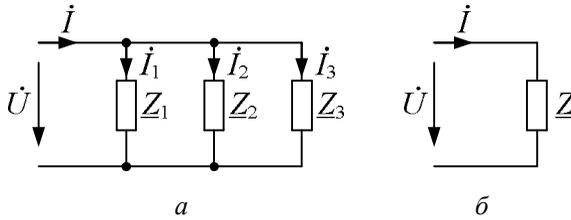


Рис. 11.4. Параллельное соединение приемников (а) и схема эквивалентной цепи (б)

В соответствии с первым законом Кирхгофа

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = \sum \dot{I}_k.$$

Разделив все составляющие уравнения на напряжение  $\dot{U}$ :

$$\frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}} + \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}} + \frac{\dot{I}_3}{\dot{U}},$$

получим

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3},$$

или

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 = \sum \underline{Y}_k = g - jb,$$

где  $g = \sum g_k$ ;  $b = \sum b_k$ .

Значит, при параллельном соединении приемников эквивалентная комплексная проводимость всей цепи равна алгебраической сумме комплексных проводимостей отдельных ветвей.

Эквивалентное комплексное сопротивление

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}}.$$

В частном случае, когда параллельно соединены только две ветви, эквивалентное комплексное сопротивление всей цепи определяют по формуле

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

Таким образом, исходную схему с параллельным соединением приемников (рис. 11.4, *a*) можно преобразовать в более простую эквивалентную схему (рис. 11.4, *б*) и по закону Ома определить ток источника:

$$i = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \dot{U} \underline{Y}$$

и токи в ветвях:

$$i_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_1} = \dot{U} \underline{Y}_1; \quad i_2 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_2} = \dot{U} \underline{Y}_2; \quad i_3 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_3} = \dot{U} \underline{Y}_3.$$

Расчет токов проверяют по первому закону Кирхгофа:

$$i = i_1 + i_2 + i_3.$$

Поскольку смешанное соединение (рис. 11.5) представляет собой сочетание последовательных и параллельных соединений участков цепи, то соответственно можно использовать приемы, рассмотренные ранее. При этом схема может быть преобразована в более простую электрическую схему путем замены параллельных ветвей одной эквивалентной ветвью и последовательно соединенных участков цепи – одним участком.

Предположим, что заданы напряжение  $\dot{U}$  на зажимах цепи, значения всех комплексных сопротивлений  $\underline{Z}_1 - \underline{Z}_4$  и требуется рассчитать все токи. Задачу решают методом преобразования схем.

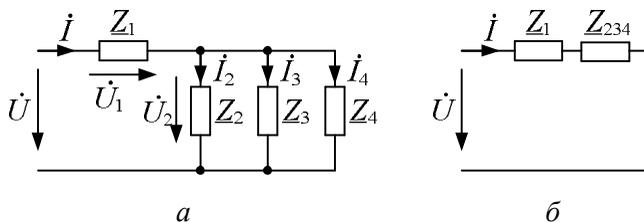


Рис. 11.5. Смешанное соединение приемников (*a*) и эквивалентная схема преобразования цепи (*б*)

Вначале определяют эквивалентную комплексную проводимость параллельных ветвей с сопротивлениями  $\underline{Z}_2$ ,  $\underline{Z}_3$  и  $\underline{Z}_4$ :

$$\underline{Y}_{234} = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 = \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_4}.$$

Эквивалентное комплексное сопротивление  $\underline{Z}_{234} = \frac{1}{\underline{Y}_{234}}$ .

Значит, исходную схему можно привести к более простой, состоящей всего из двух последовательно соединенных приемников с сопротивлениями  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_{234}$  (рис. 11.5, б).

Эквивалентное сопротивление всей цепи  $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{234}$ .

По закону Ома ток в неразветвленной части цепи  $\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}$ .

Для расчета токов в параллельных ветвях цепи необходимо знать приложенное к ним напряжение  $\dot{U}_2$ , которое можно рассчитать двумя способами:

1) по второму закону Кирхгофа:  $\dot{U}_2 = \dot{U} - \dot{U}_1 = \dot{U} - \dot{I}_1 \underline{Z}_1$ ;

2) по закону Ома:  $\dot{U}_2 = \dot{I}_1 \underline{Z}_{234}$ .

Тогда токи в параллельных ветвях  $\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_2}$ ;  $\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_3}$ ;  $\dot{I}_4 = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_4}$ .

Результаты расчетов проверяют по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4,$$

и по балансу мощностей:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4,$$

где  $P = UI \cos \varphi$ ;  $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$ ;  $P_1 = I_1^2 R_1$ ;  $P_2 = I_2^2 R_2$ ;  $P_3 = I_3^2 R_3$ ;  $P_4 = I_4^2 R_4$ .

Для наглядности расчет цепи синусоидального тока обычно сопровождают построением векторных диаграмм токов и напряжений.

**Пример 11.2.** Определить токи в цепи (рис. 11.6) и построить векторную диаграмму токов и напряжений, если  $U = 100$  В,  $R_1 = 6$  Ом,  $X_1 = 8$  Ом,  $R_2 = 3$  Ом,  $X_2 = 7$  Ом,  $R_3 = 2$  Ом,  $X_3 = 2$  Ом.

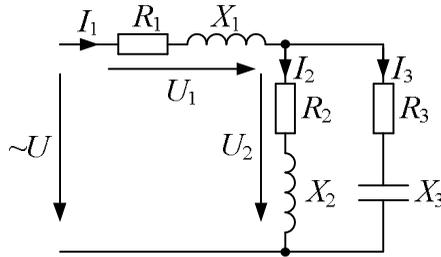


Рис. 11.6. Схема цепи со смешанным соединением проводников

**Решение.** Выбираем положительные направления токов и напряжений, указываем их направления на схеме цепи. Записываем комплексные сопротивления ветвей:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 = 6 + j8 = 10e^{53^\circ 13'} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 = 3 + j7 = 7,13e^{66^\circ 50'} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 - jX_3 = 2 - j2 = 2,82e^{-j45^\circ} \text{ Ом}.$$

Эквивалентное комплексное сопротивление параллельных ветвей

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{(3 + j7)(2 - j2)}{3 + j7 + 2 - j2} = 2,8 - j1,2 = 3,05e^{-j23^\circ 10'} \text{ Ом}.$$

Эквивалентное комплексное сопротивление всей цепи

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = 6 + j8 + 2,8 - j1,2 = 8,8 + j6,8 = 11,1e^{j37^\circ 69'} \text{ Ом}.$$

Ток на неразветвленном участке цепи  $\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}$ .

Комплексное напряжение на входе цепи  $\dot{U} = Ue^{j\psi_u}$ . Примем начальную фазу  $\psi_u = 0$ , тогда  $\dot{U} = 100e^{j0^\circ} = 100 \text{ В}$ .

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{100}{8,8 + j6,8} = 7,12 - j5,5 = 9e^{-j37^\circ 69'} \text{ А}.$$

Как видно, действующее значение тока  $I_1 = \sqrt{7,12^2 + 5,5^2} = 9 \text{ А}$ . Начальная фаза тока  $\psi_i = \arctg \frac{-5,5}{7,12} = -37^\circ 69'$ .

Падение напряжения на неразветвленном участке цепи

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \underline{Z}_1 = (7,12 - j5,5)(6 + j8) = 86,72 + j23,96 = 90e^{15,45^\circ} \text{ В.}$$

Значит, напряжение на параллельных ветвях

$$\dot{U}_2 = \dot{U} - \dot{U}_1 = 100 - (86,72 + j23,96) = 13,28 - j23,96 = 27,39e^{-j61^\circ} \text{ В,}$$

и соответственно токи в них

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{13,28 - j23,96}{3 + j7} = -2,2 - j2,84 = -3,59e^{-j127,6^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{13,28 - j23,96}{2 - j2} = 9,31 - j2,67 = 9,69e^{-j16^\circ} \text{ А.}$$

Результаты вычислений проверим по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = -2,2 - j2,84 + 9,31 - j2,67 = 7,11 - j5,51 \text{ А.}$$

Как видно, результаты практически совпадают. Действующие значения токов есть модули их комплексных значений, а именно:

$$I_1 = \sqrt{7,11^2 + 5,51^2} = 9 \text{ А; } I_2 = \sqrt{2,2^2 + 2,84^2} = 3,59 \text{ А;}$$

$$I_3 = \sqrt{9,31^2 + 2,67^2} = 9,69 \text{ А.}$$

Составляем баланс активных мощностей.

Активная мощность источника питания

$$P = UI_1 \cos \varphi = 100 \cdot 9 \cdot \cos 37^\circ 69' = 712,2 \text{ Вт,}$$

где  $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 - (-37^\circ 69') = 37^\circ 69'$ ;  $\psi_i = \arctg \frac{-5,51}{7,11} = -37^\circ 69'$ .

Активные мощности потребителей:

$$P_1 = I_1^2 R_1 = 9^2 \cdot 6 = 486 \text{ Вт; } P_2 = I_2^2 R_2 = 3,59^2 \cdot 3 = 38,66 \text{ Вт;}$$

$$P_3 = I_3^2 R_3 = 9,69^2 \cdot 2 = 187,8 \text{ Вт.}$$

В результате

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 486 + 38,66 + 187,8 = 712,46 \text{ Вт.}$$

Значит, баланс мощностей также выполняется. Следовательно, расчеты выполнены правильно. Строим векторную диаграмму, откладывая в масштабе комплексной плоскости векторы токов и напряжений (рис. 11.7) в соответствии с первым и вторым законами Кирхгофа:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3; \quad \dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2.$$

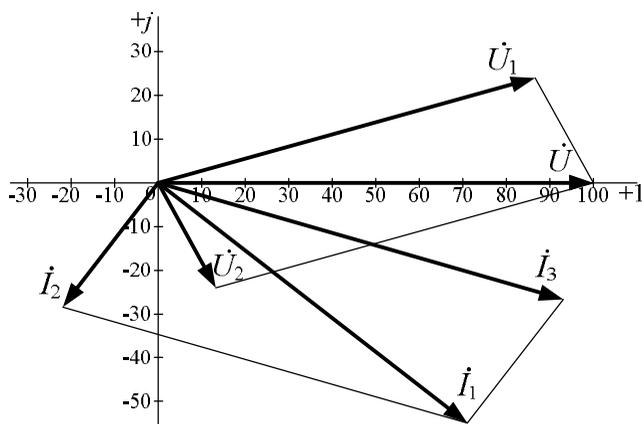


Рис. 11.7. Векторная диаграмма токов и напряжений

### 11.3. Расчет сложных цепей синусоидального тока

Символический метод особенно эффективен при анализе сложных цепей. Поскольку все методы расчета подобных цепей (метод контурных токов, узловых напряжений и др.) базируются на законах Ома и Кирхгофа, то эти методы могут быть использованы и при комплексной форме с заменой соответствующих величин их комплексными значениями. Проиллюстрируем это на примере расчета электрической цепи (рис. 11.8) методом двух узлов.

Под *методом двух узлов* понимают метод расчета электрических цепей, где за искомое принимают напряжение между двумя узлами схем, с помощью которого затем определяют токи ветвей.

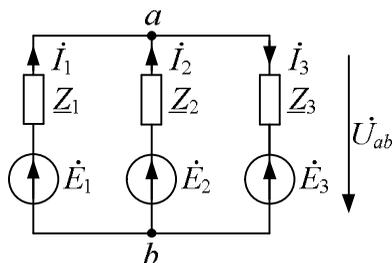


Рис. 11.8. Схема электрической цепи с двумя узлами

Чтобы получить расчетную формулу этого метода, рассмотрим пример, схема электрической цепи которого приведена на рисунке 11.8. Определим напряжение между двумя узлами  $U_{ab}$ , воспользовавшись методом узловых потенциалов. Примем  $\phi_b = 0$ , тогда уравнение будет иметь следующий вид:

$$\dot{\phi}_a \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) - \dot{\phi}_b \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) = \dot{E}_1 \frac{1}{Z_1} + \dot{E}_2 \frac{1}{Z_2} + \dot{E}_3 \frac{1}{Z_3},$$

или

$$\dot{\phi}_a (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) - \dot{\phi}_b (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) = \dot{E}_1 \underline{Y}_1 + \dot{E}_2 \underline{Y}_2 + \dot{E}_3 \underline{Y}_3.$$

Поскольку  $\dot{U}_{ab} = \dot{\phi}_a - \dot{\phi}_b = \dot{\phi}_a$ , то напряжение

$$\dot{U}_{ab} = \frac{\dot{E}_1 \underline{Y}_1 + \dot{E}_2 \underline{Y}_2 + \dot{E}_3 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}.$$

В общем случае

$$\dot{U}_{ab} = \frac{\sum \dot{E}_k \underline{Y}_k}{\sum \underline{Y}_k}. \quad (11.1)$$

Расчет цепи методом двух узлов осуществляют в такой последовательности. Задают условное положительное направление напряжения между двумя узлами и рассчитывают его, используя расчетную формулу (11.1). Затем задают положительные направления токов в ветвях и обозначают их на схеме. По закону Ома для участка цепи с ЭДС определяют токи в ветвях:

$$\dot{I}_k = \frac{\pm \dot{U}_{ab} \pm \dot{E}_k}{Z_k} = (\pm \dot{U}_{ab} \pm \dot{E}_k) \underline{Y}_k.$$

При этом  $\dot{U}_{ab}$  и  $\dot{E}_k$  принимают положительными, если их направления в схеме совпадают с принятым направлением искомого тока  $\dot{I}_k$ .

Так, для цепи (см. рис. 11.8) уравнения для определения токов в ветвях имеют следующий вид:

$$\dot{I}_1 = \frac{-\dot{U}_{ab} + \dot{E}_1}{Z_1}; \quad \dot{I}_2 = \frac{-\dot{U}_{ab} + \dot{E}_2}{Z_2}; \quad \dot{I}_3 = \frac{-\dot{U}_{ab} + \dot{E}_3}{Z_3}.$$

Результаты расчета токов проверяют по первому закону Кирхгофа.



### Вопросы и задачи для самоконтроля

1. Сформулируйте закон Ома, законы Кирхгофа в комплексной форме.

2. Запишите, как определяются действующие значения токов, напряжений по их комплексным значениям.

3. Определите токи ветвей со смешанным соединением элементов (рис. 11.9), если в неразветвленной части схемы включен конденсатор емкостью  $C = 33,2$  мкФ, а в параллельных ветвях соответственно активное сопротивление  $R = 10$  Ом и индуктивность  $L = 5,97$  мГн. Напряжение источника  $U = 100$  В, частота  $f = 400$  Гц. Ответ:  $I = 6,88$  А;  $I_R = 8,23$  А;  $I_L = 5,49$  А.

4. Используя метод двух узлов, определите ток через сопротивление  $Z_3$ , если  $\dot{E}_1 = 80$  В,  $\dot{E}_2 = 30$  В,  $\underline{Z}_1 = -j10$  Ом,  $\underline{Z}_2 = 5$  Ом,  $\underline{Z}_3 = j10$  Ом. Ответ: 5 А.

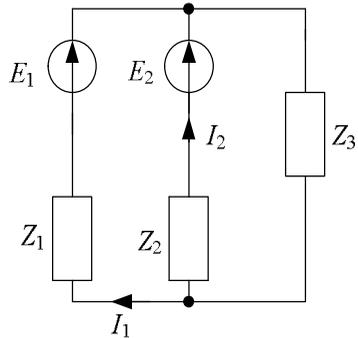


Рис. 11.9

## 12. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ

### 12.1. Понятие об индуктивно связанных цепях

Электрические цепи, в которых изменение тока в одной из ветвей может вызвать появление ЭДС в другой ветви, называют *индуктивно связанными* или *цепями со взаимной индукцией*. Возникающую в этом случае ЭДС называют ЭДС взаимной индукции (взаимоиндукции).

Рассмотрим две катушки, расположенные на некотором расстоянии друг от друга (рис. 12.1).

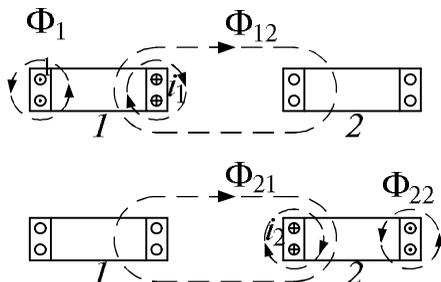


Рис. 12.1. Магнитная связь между двумя катушками

Пусть по обмотке первой катушки протекает ток  $i_1$ , в результате возникает магнитный поток, часть которого  $\Phi_{11}$  будет связана с витками первой катушки (контура), часть магнитного потока  $\Phi_{12}$  пронизывает витки второй катушки.

Потокоцепление первой катушки со второй  $\Psi_{12}$  в случае неферромагнитной среды

$$\Psi_{12} = N_2 \Phi_{12},$$

где  $N_2$  – число витков второй катушки.

Если по обмотке второй катушки проходит ток  $i_2$ , то создается магнитный поток, часть которого  $\Phi_{21}$  будет пронизывать витки обмотки первой катушки и образует потокосцепление  $\Psi_{21}$ :

$$\Psi_{21} = N_1 \Phi_{21},$$

где  $N_1$  – число витков первой катушки.

Отношение потокосцепления второго контура (катушки)  $\Psi_{12}$  к силе тока, возбуждающего это потокосцепление  $i_1$ , называют *взаимной индуктивностью контуров*:

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_1} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{i_1}.$$

Аналогично

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_2} = \frac{N_1 \Phi_{21}}{i_2}.$$

Для двух контуров всегда имеет место равенство на основании принципа взаимности, а именно:  $M_{12} = M_{21} = M$ , поэтому необходимость в написании индексов отпадает.

*Взаимная индуктивность* измеряется в генри (Гн).

Магнитный поток взаимной индукции является частью потока одного из контуров, поэтому взаимная индуктивность, как и индуктивность, зависит от свойств материалов магнитной цепи, геометрических параметров, числа витков обмоток катушек, а также от их взаимного расположения.

Магнитная связь между двумя контурами характеризуется коэффициентом связи.

Отношение потока  $\Phi_{12}$  ко всему потоку  $\Phi_{11}$

$$\frac{\Phi_{12}}{\Phi_{11}} = \frac{\Psi_{12}}{N_2} = \frac{\Psi_{11}}{N_1} = \frac{\Psi_{12} N_1}{\Psi_{11} N_2} = \frac{M i_1 N_1}{L_1 i_1 N_2} = \frac{M N_1}{L_1 N_2}. \quad (12.1)$$

Аналогично

$$\frac{\Phi_{21}}{\Phi_{22}} = \frac{M N_2}{L_2 N_1}, \quad (12.2)$$

где  $L_1, L_2$  – индуктивность первой и второй катушек.

Каждое из отношений (12.1), (12.2) показывает, какая часть магнитного потока, созданного током одной катушки, сцепляется с другой.

Среднее геометрическое этих отношений представляет собой коэффициент или степень индуктивной связи  $K$  двух катушек (см. также п. 5.9):

$$\sqrt{\frac{\Phi_{12}\Phi_{21}}{\Phi_{11}\Phi_{22}}} = \sqrt{\frac{M^2 N_1 N_2}{L_1 L_2 N_2 N_1}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = K.$$

Поскольку магнитный поток  $\Phi_{11}$  больше магнитного потока  $\Phi_{12}$ , а  $\Phi_{22}$  больше магнитного потока  $\Phi_{21}$ , то коэффициент связи всегда меньше единицы:  $K < 1$ .

В некоторых случаях коэффициент связи приближается к единице, например у трансформаторов с замкнутым детальным магнитопроводом.

Устройство, дающее возможность изменять магнитную связь двух катушек, называется *вариометром*. Он представляет собой две катушки, из которых одна может поворачиваться. Магнитная связь таких катушек будет зависеть от взаимного расположения катушек или от способов их соединений.

## 12.2. Взаимоиндуктивное сопротивление

При наличии двух индуктивно связанных катушек  $L_1$  и  $L_2$  каждая из них будет пронизываться двумя магнитными потоками: самоиндукции, вызванным собственным током, и взаимоиндукции, вызванным током другой катушки. Следовательно, в каждой катушке индуцируются две ЭДС: самоиндукции  $e_L$  и взаимоиндукции  $e_M$ .

В первой катушке

$$e_1 = e_{L_1} + e_{M_1} = -L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}; \quad (12.3)$$

во второй катушке

$$e_2 = e_{L_2} + e_{M_2} = -L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}. \quad (12.4)$$

Знак «+» или «-» в выражениях (12.3), (12.4) зависит от взаимного направления потоков самоиндукции и взаимоиндукции.

Если потоки самоиндукции и взаимоиндукции совпадают по направлению, ставят знак «-», если противоположны – знак «+».

Явление взаимоиндукции учитывают в расчете реальных электрических цепей при наличии в них индуктивно связанных катушек.

Абсолютное значение напряжения, уравнивающего соответствующую ЭДС взаимоиндукции:

$$u_M = \left| M \frac{di}{dt} \right|,$$

или в комплексной форме:

$$\dot{U}_M = |j\omega M \dot{I}|,$$

где  $\omega M = X_M$  – реактивное сопротивление взаимоиндукции;

$j\omega M = \underline{Z}_M$  – комплексное сопротивление взаимоиндукции.

### 12.3. Согласное и встречное включение катушек

Для определения знака перед напряжением необходимо предварительно определить, как включены катушки: согласно или встречно. Правильное заключение об этом можно сделать, если известны направление намотки обмоток катушек на сердечник и направление тока в этих обмотках.

Два вывода, принадлежащих двум разным катушкам, называют *одноименными*, если при одинаковом направлении токов относительно них магнитные потоки самоиндукции и взаимоиндукции совпадают.

Если к выводам *a* и *c* двух катушек (рис. 12.2) подвести токи  $i_1$  и  $i_2$  одного направления, то в этом случае потокоцепление второй катушки с первой  $\Psi_{21}$  будет совпадать по направлению с потокоцеплением  $\Psi_{11}$  первой катушки, следовательно, зажимы *a* и *c* считают одноименными (начало обмоток). Одноименными в таком случае будет и вторая пара зажимов *b* и *d* (концы обмоток).

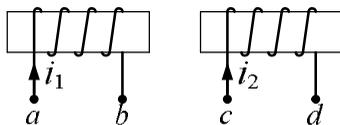


Рис. 12.2. Индуктивно связанные катушки

Обычно на схемах электрических цепей сердечники не изображают, а одноименные зажимы (начало обмоток) помечают точками или звездочками (рис. 12.3).

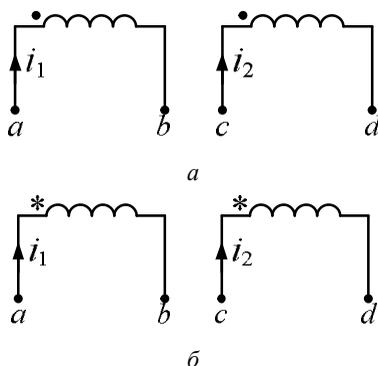


Рис. 12.3. Примеры обозначения одноименных зажимов катушек:  
*a* – точками; *б* – звездочками

Индуктивно связанные элементы включены согласно, если направления магнитного потока самоиндукции и магнитного потока взаимоиндукции совпадают. При этом возрастает и результирующий поток, сцепляющийся с катушкой. Это имеет место тогда, когда токи в двух катушках одинаково ориентированы относительно одноименных зажимов (рис. 12.4, *a*).

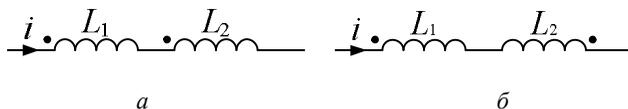


Рис. 12.4. Схемы последовательного включения катушек:  
*a* – согласно; *б* – встречно

Если магнитный поток взаимной индукции направлен навстречу магнитному потоку самоиндукции, ослабляет его, такое включение индуктивно связанных элементов называют встречным. В таком случае токи в двух катушках должны быть ориентированы к разным зажимам (рис. 12.4, б).

Если в цепи будет несколько магнитно-связанных катушек, то начало и конец обмоток различают для каждой пары отдельно. Начала и концы обмоток можно определить экспериментально.

Расчет электрических цепей с индуктивно связанными катушками производят символическим методом. При этом используют метод уравнений Кирхгофа или метод контурных токов.

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа учитывают падение напряжения от взаимной индукции с соответствующим знаком.

Если включение двух катушек согласное, падение напряжения от взаимной индукции берут с тем же знаком, что и падение напряжения от самоиндукции, при встречном включении – наоборот.

#### **12.4. Расчет электрических цепей с взаимной индуктивностью, последовательное соединение**

Для расчета цепей с индуктивно связанными элементами нельзя воспользоваться законом Ома, так как падение напряжения на ветви, индуктивно связанной с другой ветвью электрической цепи, зависит от токов в этих ветвях. В таких цепях непосредственно применимы только законы Кирхгофа и метод контурных токов, при этом используется комплексная форма записи законов.

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа следует учитывать на индуктивно связанных элементах падение напряжения взаимоиндукции:  $\dot{U}_M = j\omega M \dot{I}$ .

Знак «+» или «-» при  $\dot{U}_M$  определяется правилом знаков: если включение двух катушек согласное, падение напряжения от взаимной индукции берут с тем же знаком, что и падение напряжения от самоиндукции, при встречном включении – знак меняется на противоположный.

Расчет цепи с индуктивно связанными катушками рассмотрим на примере их последовательного соединения. Две последователь-

но соединенные индуктивно связанные катушки могут иметь согласное или встречное включение.

При согласном включении (рис. 12.5) на основании второго закона Кирхгофа имеем уравнение для мгновенных значений токов и напряжений:

$$iR_1 + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + iR_2 + M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = u,$$

или в комплексной форме:

$$iR_1 + j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M \dot{I} + iR_2 + j\omega M \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} = \dot{U}, \quad (12.5)$$

где  $j\omega L_1 \dot{I}$ ,  $j\omega L_2 \dot{I}$  – соответственно комплексные напряжения самоиндукции в каждой катушке;

$j\omega M \dot{I}$  – комплексное напряжение взаимоиנדукции;

$\omega M = X_M$  – сопротивление взаимоиנדукции;

$j\omega M = jX_M = \underline{Z}_M$  – комплексное сопротивление взаимоиנדукции.

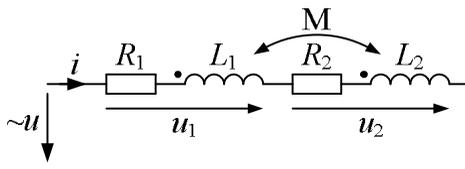


Рис. 12.5. Схема согласного включения индуктивно связанных катушек

Из уравнения (12.5) следует, что ток в электрической цепи

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)}, \quad (12.6)$$

где  $R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M) = \underline{Z}_c$  – эквивалентное комплексное сопротивление цепи при согласном включении катушек;

$L_1 + L_2 + 2M = L_c$  – эквивалентная индуктивность двух катушек при согласном включении.

Уравнение (12.6) проиллюстрируем с помощью векторной диаграммы (рис. 12.6), приняв за базовый вектор тока  $\dot{I}$ .

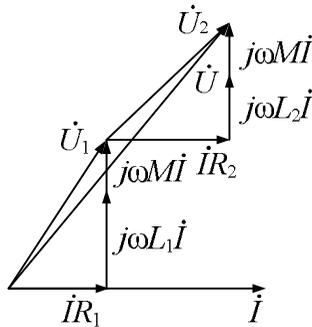


Рис. 12.6. Векторная диаграмма тока и напряжений при согласном включении двух индуктивно связанных катушек

Напряжение на первой катушке

$$\dot{U}_1 = \dot{I}R_1 + j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M \dot{I};$$

напряжение на второй катушке

$$\dot{U}_2 = \dot{I}R_2 + j\omega L_2 \dot{I} + j\omega M \dot{I}.$$

При встречном включении катушек (рис. 12.7) на основании второго закона Кирхгофа имеем равенство

$$iR_1 + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + iR_2 + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} = u,$$

или в комплексной форме:

$$\dot{I}R_1 + j\omega L_1 \dot{I} - j\omega M \dot{I} + \dot{I}R_2 + j\omega L_2 \dot{I} - j\omega M \dot{I} = \dot{U}. \quad (12.7)$$

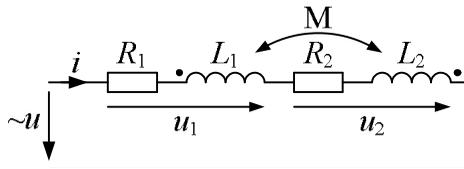


Рис. 12.7. Встречное включение двух катушек

Из уравнения (12.7) следует

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)}, \quad (12.8)$$

где  $R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M) = \underline{Z}_в$  – эквивалентное комплексное сопротивление цепи при встречном включении катушек;

$L_1 + L_2 - 2M = L_в$  – эквивалентная индуктивность цепи при встречном включении катушек.

Уравнению (12.8) соответствует векторная диаграмма (рис. 12.8).

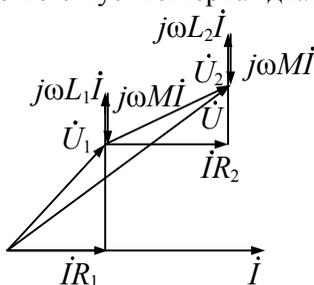


Рис. 12.8. Векторная диаграмма тока и напряжений при встречном включении двух индуктивно связанных катушек

Напряжение на первой катушке

$$\dot{U}_1 = \dot{I}R_1 + j\omega L_1 \dot{I} - j\omega M \dot{I};$$

напряжение на второй катушке

$$\dot{U}_2 = \dot{I}R_2 + j\omega L_2 \dot{I} - j\omega M \dot{I}.$$

Из выражений (12.6), (12.8)  $L_c > L_в$ , следовательно,  $\underline{Z}_c > \underline{Z}_в$ , что можно использовать при определении одноименных зажимов катушек и взаимной индуктивности.

**Пример 12.1.** Две индуктивно связанные катушки с выводами  $ab$  и  $cd$  соединены, как показано на рисунке 12.9. Катушки имеют следующие параметры:  $R_1 = 2$  Ом;  $\omega L_1 = 6$  Ом;  $R_2 = 4$  Ом;  $\omega L_2 = 4$  Ом;  $\omega M = 1$  Ом. Напряжение питания  $\dot{U} = 100$  В. Определить ток и напряжения на выводах катушек  $U_{ab}$ ,  $U_{cd}$  и построить векторную диаграмму тока и напряжений.

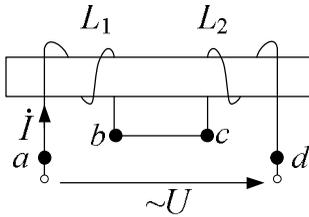


Рис. 12.9. Индуктивно связанные последовательно соединенные катушки

**Решение.** Проследив по рисунку 12.9 прохождение тока по виткам обеих катушек и применив правило правоходового винта, видим, что магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции катушек направлены навстречу друг другу, таким образом, катушки включены встречно. Заданная цепь может быть представлена схемой, показанной на рисунке 12.10.

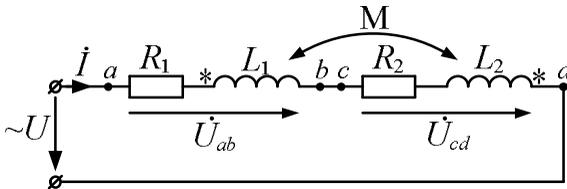


Рис. 12.10. Схема соединения двух индуктивно связанных катушек

Запишем уравнение второго закона Кирхгофа:

$$\dot{I}R_1 + j\omega L_1 \dot{I} - j\omega M \dot{I} + \dot{I}R_2 + j\omega L_2 \dot{I} - j\omega M \dot{I} = \dot{U}.$$

Искомый ток

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R_1 + j\omega L_1 + R_2 + j\omega L_2 - j2\omega M} = \frac{100}{6 + j10 - j2} = \frac{100}{6 + j8} = 6 - j8 \text{ A};$$

$$I = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ A}.$$

Напряжение на первой катушке по второму закону Кирхгофа

$$\dot{U}_{ab} = \dot{I}R_1 + j\omega L_1 \dot{I} - j\omega M \dot{I} = (6 - j8)(2 + j6 - j) = (6 - j8)(2 + j5) = 52 + j14 \text{ В};$$

$$U_{ab} = \sqrt{52^2 + 14^2} = 53,9 \text{ В}.$$

Напряжение на второй катушке

$$\dot{U}_{cd} = \dot{I}R_2 + j\omega L_2 \dot{I} - j\omega M \dot{I} = (6 - j8)(4 + j4 - j) = (6 - j8)(4 + j3) = 48 - j14 \text{ В;}$$

$$U_{cd} = \sqrt{48^2 + 14^2} = 50 \text{ В.}$$

На рисунке 12.11 представлена векторная диаграмма. По действительной оси отложен вектор напряжения  $\dot{U}$ , вектор тока  $\dot{I}$  отстает от напряжения. Падение напряжения на активном сопротивлении первой катушки  $\dot{I}R_1$  совпадает по фазе с током  $\dot{I}$ , падение напряжения на индуктивности первой катушки  $j\omega L_1 \dot{I}$  опережает ток  $\dot{I}$  по фазе на  $90^\circ$ , падение напряжения взаимной индукции  $j\omega M \dot{I}$  отстает от тока  $\dot{I}$  по фазе на  $90^\circ$ .

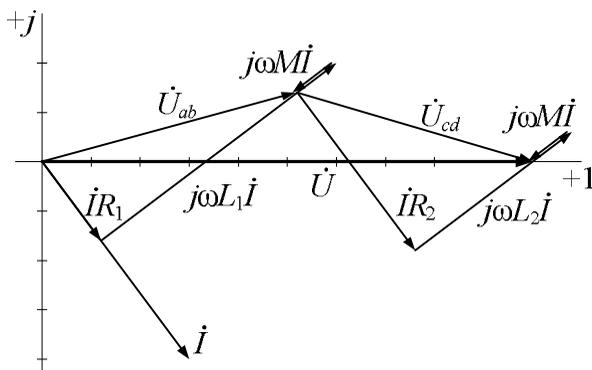


Рис. 12.11. Векторная диаграмма тока и напряжений

Сумма векторов этих напряжений дает напряжение на первой катушке  $\dot{U}_{ab}$ . Аналогично проводят векторы падений напряжений второй катушки.



### Вопросы и задачи для самоконтроля

1. Поясните, какие электрические цепи называют индуктивно связанными.
2. Дайте определение взаимной индуктивности и поясните, от чего зависит ее величина.

## 12. Электрические цепи с взаимной индуктивностью

---

3. Запишите, чему равен коэффициент связи двух индуктивно связанных катушек.

4. Запишите, чему равна ЭДС взаимоиндукции.

5. Объясните, что понимают под согласным и встречным включением двух индуктивно связанных катушек.

6. В каком случае энергия, запасенная в магнитном поле двух последовательно включенных катушек, больше при согласном или при встречном включении и почему? Ответ: при встречном.

7. Определите взаимную индуктивность двух катушек, включенных последовательно, если при встречном включении их общая индуктивность  $L = 12$  МГн, а при согласном  $L = 62$  МГн. Ответ:  $M = 12,5$  МГн.

8. Взаимная индуктивность двух контуров  $M = 2,2$  МГн. Потокосцепление первого контура со вторым  $\Psi_{12} = 1,45 \cdot 10^{-2}$  Вб. Определите ток во втором контуре. Ответ:  $I_2 = 6,6$  А.

## 13. ТРЕХФАЗНЫЕ СИММЕТРИЧНЫЕ ЦЕПИ

---

### 13.1. Трехфазная система ЭДС. Последовательность фаз

Электрическую энергию вырабатывают, передают на расстояние и потребляют в основном как энергию трехфазного тока. Это объясняется высокой экономичностью генераторов, линий электропередачи, электродвигателей и других устройств трехфазного тока по сравнению с аналогичными устройствами однофазного тока.

Совокупность трех однофазных цепей, в каждой из которых действуют три синусоидальные ЭДС, создаваемые одним источником, одной и той же частоты, сдвинутые по фазе относительно друг друга на  $120^\circ$ , называют *трехфазной цепью*.

Отдельные части трехфазной цепи называют *фазами*, например отдельные обмотки генератора – фазы генератора. В приемнике различают три фазы приемника, в линии электропередачи – три фазы линии электропередачи. Иногда фазой называют однофазную цепь, входящую в состав трехфазной цепи. По различным фазам протекают токи, которые сдвинуты относительно друг друга по фазе.

Таким образом, в электротехнике термин «фаза» имеет два различных значения: 1) аргумент (угол) синусоидально изменяющейся величины; 2) техническое устройство – составная часть трехфазной цепи.

На рисунке 13.1 схематично показано устройство трехфазного генератора переменного тока. На его статоре расположены три одинаковые, но смещенные в пространстве относительно друг друга на  $120^\circ$  обмотки ( $AX$ ,  $BY$ ,  $CZ$ ). Для упрощения каждая обмотка показана состоящей только из двух проводников, помещенных в диаметрально противоположные пазы статора. Эти проводники на заднем торце статора соединены друг с другом. На переднем торце они оканчиваются зажимами, которые служат для присоединения внешней цепи.

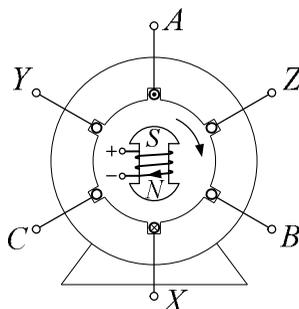


Рис. 13.1. Устройство трехфазного генератора

Три обмотки статора называют *фазными обмотками* или *фазами генератора*. Причем первые буквы латинского алфавита *A*, *B* и *C* обозначают «начала» обмоток, а последние буквы этого же алфавита *X*, *Y* и *Z* – «концы» обмоток.

На роторе расположена обмотка возбуждения, питаемая постоянным током. Ротор является электромагнитом с полюсами *N* и *S*. При вращении ротора изменяется магнитный поток, пронизывающий витки обмоток статора и, согласно закону электромагнитной индукции, в обмотках наводится переменная ЭДС. Генераторы конструируют таким образом, чтобы форма ЭДС была близка к синусоидальной.

Наводимые в обмотках ЭДС по величине максимальны, когда ось полюсов ротора пересекает проводники статора. Для различных обмоток это происходит в различные моменты времени, поэтому наводимые ЭДС не совпадают по фазе.

Выберем положительные направления ЭДС во всех обмотках от концов к началам. В момент времени, соответствующий положению ротора (см. рис. 13.1), величина ЭДС в обмотке *A* максимальна и имеет направление, которое принято положительным. Положительный максимум ЭДС в обмотке *B* наступит позже, когда ротор повернется на  $1/3$  оборота. Поскольку один оборот ротора двухполюсного генератора происходит за время, равное периоду  $T$ , то поворот ротора на  $1/3$  оборота соответствует  $1/3$  периода и, следовательно, ЭДС в обмотке *B* отстает по времени от ЭДС в обмотке *A* на  $T/3$ , а ЭДС в обмотке *C* отстает по времени от ЭДС в обмотке *B* также на  $T/3$ .

Примем начальную фазу ЭДС обмотки  $A$   $\psi_A = 0$ , тогда мгновенные значения ЭДС

$$e_A = E_m \sin \omega t; e_B = E_m \sin [\omega(t - T/3)]; e_C = E_m \sin [\omega(t - 2T/3)].$$

Учтем, что

$$\frac{\omega T}{3} = \frac{2\pi T}{T3} = \frac{2\pi}{3},$$

и запишем

$$e_B = E_m \sin (\omega t - 2\pi/3) = E_m \sin (\omega t - 120^\circ); \quad (13.1)$$

$$e_C = E_m \sin (\omega t - 4\pi/3) = E_m \sin (\omega t - 240^\circ) = E_m \sin (\omega t + 120^\circ). \quad (13.2)$$

Из выражений (13.1), (13.2) видно, что ЭДС в обмотке  $B$  отстает от ЭДС в обмотке  $A$  по фазе на  $120^\circ$ , а ЭДС в обмотке  $C$  опережает ЭДС в обмотке  $A$  по фазе на  $120^\circ$ .

Комплексные действующие значения ЭДС будут равны:

$$\dot{E}_A = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = E_A;$$

$$\dot{E}_B = \dot{E}_A e^{-j120^\circ} = E_A (\cos 120^\circ - j \sin 120^\circ) = E_A (-0,5 - j0,866);$$

$$\dot{E}_C = \dot{E}_A e^{j120^\circ} = E_A (\cos 120^\circ + j \sin 120^\circ) = E_A (-0,5 + j0,866).$$

График мгновенных значений и векторная диаграмма ЭДС трехфазного генератора для рассмотренного случая показаны на рисунке 13.2.

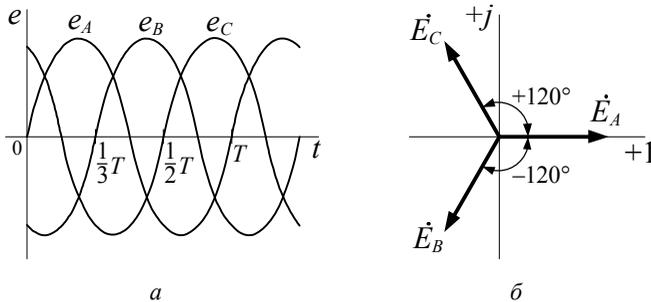


Рис. 13.2. Мгновенные ЭДС (а) и векторная диаграмма ЭДС (б) трехфазного генератора

Приведенная выше совокупность ЭДС в обмотках трехфазного генератора называется симметричной трехфазной системой ЭДС (так как все ЭДС равны по амплитуде и отстают по фазе относительно друг друга на один и тот же угол  $120^\circ$ ).

Порядок, в котором ЭДС в фазных обмотках генератора проходит через одинаковые значения (например, через положительные максимумы), называют последовательностью фаз или порядком чередования фаз. При указанном на рисунке 13.1 направлении вращения ротора получаем последовательность фаз *АВСА* и т. д. Если изменить направление вращения ротора на противоположное, получим последовательность фаз *АСВА* и т. д.

Последовательность фаз *АВСА* и т. д. называют прямой, *АСВА* и т. д. – обратной.

Существуют два основных способа соединения обмоток генераторов, трансформаторов и фаз приемников в трехфазных цепях: соединение звездой и соединение треугольником.

#### **13.2. Несвязанная трехфазная система электрических цепей**

Фазные обмотки трехфазного генератора можно соединить с тремя приемниками энергии шестью проводами. Такую трехфазную цепь называют *несвязанной*.

Несвязанная трехфазная система практически не применяется, тем не менее она помогла найти основные способы соединения фаз источника, приемника, уяснить основные соотношения между некоторыми величинами при объединении фазных цепей.

Схема трехфазной системы (рис. 13.3) содержит три электрически несвязанные цепи, каждая из которых состоит из обмотки источника (фаза источника), приемника (фаза приемника) и двух соединительных проводов и представляет фазу трехфазной системы. Действующие в фазах ЭДС, напряжение и токи называются соответственно *фазными величинами*. Если сопротивление соединительных проводов настолько мало, что ими можно пренебречь, то фазные напряжения источника и приемника будут одинаковые.

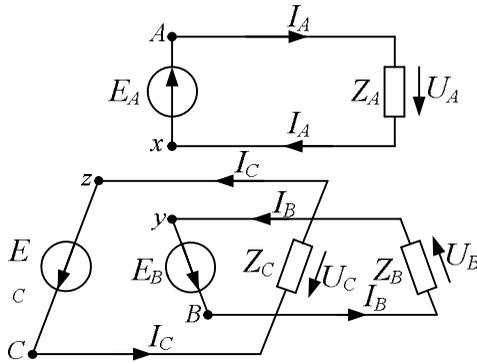


Рис. 13.3. Несвязанная трехфазная система электрических цепей

Токи, проходящие через фазу источника или приемника, называются фазными  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$  (см. рис. 13.3).

При анализе режимов работы трехфазных цепей важно знать условные положительные направления ЭДС в каждой фазе, напряжения и токов, так как от этого зависят знаки в уравнениях, составляемых по законам Кирхгофа. За условно положительное направление ЭДС в каждой фазе источника принимают ее направление от конца обмотки к началу и условно положительное направление напряжения фазы источника от начала к концу. Направление же фазных токов совпадает с направлением ЭДС в каждой фазе (см. рис. 13.3).

Положительное направление напряжения на фазе приемника совпадает с положительным направлением тока в фазе.

### 13.3. Соединение обмоток генератора звездой

Если концы обмоток генератора объединить в общую точку – нейтральную, то образуется так называемое *соединение звездой* (условное обозначение  $\Upsilon$ ). Подобным образом можно объединить концы фаз приемника в общую нейтральную точку.

Появилась возможность три обратных провода (см. рис. 13.3) объединить в один общий провод (рис. 13.4).

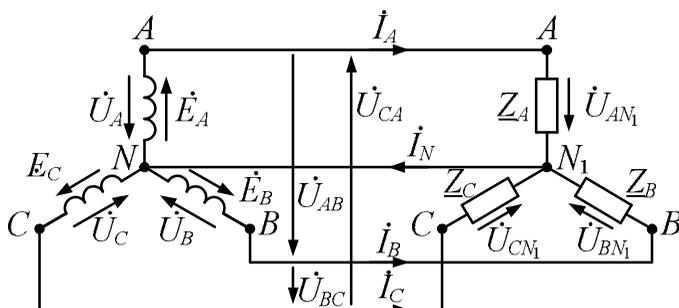


Рис. 13.4. Схема трехфазной цепи при соединении фаз генератора и приемника звездой

Провод, соединяющий нейтральные точки генератора и приемника, называют *нейтральным*. Таким образом, при переходе от несвязанной цепи к электрически связанной произошло уменьшение числа проводов, что экономически выгодно.

В соответствии с рисунком 13.4 положительное направление тока в нейтральном проводе – от нейтральной точки приемника к нейтральной точке генератора.

Провода, соединяющие начала фаз генератора с началом фаз приемника, называются *линейными*.

В трехфазных электрически связанных цепях помимо фазных величин используют линейные величины. Токи в линейных проводах называются линейными. Положительное направление линейных токов – от генератора к приемнику. Из рисунке 13.4 видно, что фаза генератора, линейный провод, фаза приемника соединены последовательно и по ним протекает один и тот же ток. Следовательно, при соединении фаз генератора и приемника звездой линейный ток  $I_{\text{л}}$  равен фазному  $I_{\text{ф}}$ .

Напряжение между линейными проводами называется *линейным (междуфазным)*. Положительные направления линейных напряжений взяты в направлении  $ABCA$  –  $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$ ,  $U_{CA}$  (см. рис. 13.4).

Сопротивления фазных обмоток генератора малы и их, как правило, принимают равными нулю, поэтому фазные напряжения генератора равны фазным ЭДС:

$$\dot{U}_A = \dot{E}_A; \quad \dot{U}_B = \dot{E}_B; \quad \dot{U}_C = \dot{E}_C.$$

Следовательно, фазные напряжения генератора симметричны, т. е. равны по величине и сдвинуты по фазе на  $120^\circ$ :

$$\dot{U}_A = U_A e^{-j120^\circ}; \quad \dot{U}_B = U_A e^{-j120^\circ}; \quad \dot{U}_C = U_A e^{j120^\circ}.$$

Определим соотношение между фазными и линейными напряжениями на генераторе, соединенном звездой.

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для контура  $ABNA$  (см. рис. 13.4):

$$\dot{U}_A + \dot{U}_B - \dot{U}_A = 0.$$

Выразим комплексное значение линейного напряжения:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B,$$

аналогично

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C, \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A,$$

т. е. комплексные значения линейных напряжений равны разности соответствующих комплексных значений фазных напряжений.

Построим векторную диаграмму фазных и линейных напряжений (рис. 13.5).

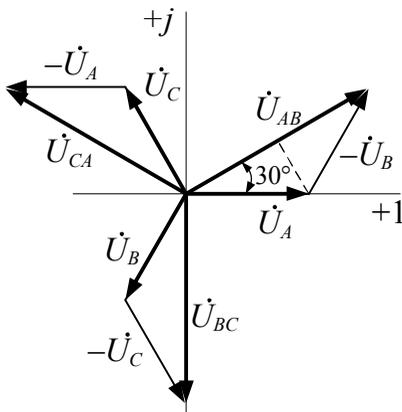


Рис. 13.5. Векторная диаграмма фазных и линейных напряжений

При построении векторной диаграммы допускаем, что начальная фаза напряжения на фазе  $A$  генератора  $\psi_{uA} = 0$ .

Для построения векторов линейных напряжений используем следующие выражения:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{AB} &= \dot{U}_A - \dot{U}_B = \dot{U}_A + (-\dot{U}_B); \\ \dot{U}_{BC} &= \dot{U}_B + (-\dot{U}_C); \\ \dot{U}_{CA} &= \dot{U}_C + (-\dot{U}_A).\end{aligned}$$

Из вершины тупого угла равнобедренного треугольника со сторонами  $\dot{U}_A$ ,  $-\dot{U}_B$ ,  $\dot{U}_{AB}$  проведем перпендикуляр. Поскольку тупой угол между векторами фазных напряжений равен  $120^\circ$ , то острый угол будет равен  $30^\circ$ . Следовательно, из полученного прямоугольного треугольника

$$\frac{1}{2} U_{AB} = U_A \cos 30^\circ = U_A \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{или } U_{л} = \sqrt{3} U_{\phi}.$$

Таким образом, для симметричной системы фазных напряжений при соединении фаз генератора звездой линейные напряжения будут больше фазных напряжений в  $\sqrt{3}$  раз. Кроме того, из векторной диаграммы видно, что линейные напряжения опережают соответствующие фазные напряжения на  $30^\circ$  (вращение векторов против хода часовой стрелки). Линейные напряжения в комплексной записи имеют следующий вид:

$$\dot{U}_{AB} = \sqrt{3} \dot{U}_A e^{j30^\circ}; \quad \dot{U}_{BC} = \sqrt{3} \dot{U}_B e^{j30^\circ}; \quad \dot{U}_{CA} = \sqrt{3} \dot{U}_C e^{j30^\circ}.$$

В трехфазных низковольтных цепях используется шкала напряжений: 127, 220, 380 и 660 В. Каждое следующее напряжение больше предыдущего в  $\sqrt{3}$  раз. Если фазное напряжение  $U_{\phi} = 127$  В, то линейное  $U_{л} = 220$  В и т. д.

Трехфазный приемник соединяют звездой, если его фазы рассчитаны на напряжение в  $\sqrt{3}$  раз меньше линейного напряжения трехфазной цепи.

**Пример 13.1.** Напряжение фазы  $A$  генератора изменяется по закону:  $u_A = 141 \sin(\omega t + 40^\circ)$  В. Записать систему фазных и линейных напряжений в комплексной форме для действующих значений.

**Решение.** Так как система напряжений генератора симметрична, то фазные напряжения равны и сдвинуты относительно друг друга на  $120^\circ$ . Действующее значение напряжения фазы  $A$  определяется по формуле

$$U_A = \frac{U_{mA}}{\sqrt{2}} = \frac{141}{\sqrt{2}} = 100 \text{ В.}$$

Из условия задачи видно, что начальная фаза  $\psi_{uA} = 40^\circ$ .

Комплексные значения фазных напряжений определяются по следующим формулам:

$$\dot{U}_A = U_A e^{j\varphi_{uA}} = 100 e^{j40^\circ} \text{ В;}$$

$$\dot{U}_B = \dot{U}_A e^{j120^\circ} = 100 e^{j40^\circ} e^{-j120^\circ} = 100 e^{-j80^\circ} \text{ В;}$$

$$\dot{U}_C = \dot{U}_A e^{j120^\circ} = 100 e^{j40^\circ} e^{j120^\circ} = 100 e^{j160^\circ} \text{ В.}$$

Напряжение  $\dot{U}_{AB}$  опережает напряжение  $\dot{U}_A$  на  $30^\circ$  и больше в  $\sqrt{3}$  раз:

$$\dot{U}_{AB} = \sqrt{3} \dot{U}_A e^{j30^\circ} = \sqrt{3} \cdot 100 e^{j40^\circ} e^{j30^\circ} = 173 e^{j70^\circ}.$$

Учитывая сдвиг линейных напряжений относительно друг друга на  $120^\circ$ , определяем их значения:

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{AB} e^{-j120^\circ} = 173 e^{j70^\circ} e^{-j120^\circ} = 173 e^{-j50^\circ} \text{ В;}$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_{AB} e^{j120^\circ} = 173 e^{j70^\circ} e^{j120^\circ} = 173 e^{j190^\circ} \text{ В.}$$

### 13.4. Соединение обмоток генератора треугольником

Фазы генератора или приемника можно соединить *треугольником* (условное обозначение  $\Delta$ ). Покажем сначала, как можно получить такую трехфазную цепь из необъединенной системы (рис. 13.6), в которой три фазные обмотки генератора соединены шестью проводами с тремя приемниками.

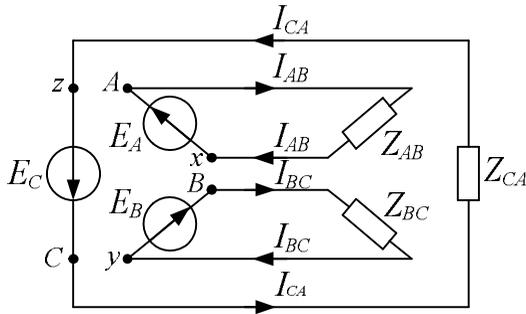


Рис. 13.6. Необъединенная трехфазная цепь

Чтобы получить соединение фазных обмоток генератора треугольником (см. рис. 13.6), соединим конец  $x$  первой обмотки с началом  $B$  второй обмотки, конец  $y$  второй обмотки – с началом  $C$  третьей обмотки и конец  $z$  третьей обмотки – с началом  $A$  первой обмотки.

Аналогичным образом соединяются и фазы приемника.

Поскольку трехфазная система ЭДС симметрична и в любой момент времени алгебраическая сумма ЭДС фаз генератора равна нулю, то никакого дополнительного (уравнительного) тока в обмотках генератора не возникает.

После объединения обмоток генератора напряжения между началом и концом каждой фазы не изменяются, т. е. эти фазные напряжения одинаковы для несвязанной (см. рис. 13.6) и связанной (рис. 13.7) систем. Поэтому токи в фазах приемника, т. е. фазные токи  $\dot{I}_{AB}$ ,  $\dot{I}_{BC}$ ,  $\dot{I}_{CA}$ , в связанной системе такие же, как и в несвязанной. Токи в каждом из трех объединенных (линейных) проводов – линейные токи – определяются на основании первого закона Кирхгофа.

Положительное направление линейного тока – от генератора к приемнику:

$$\begin{aligned}\dot{I}_A &= \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}.\end{aligned}$$

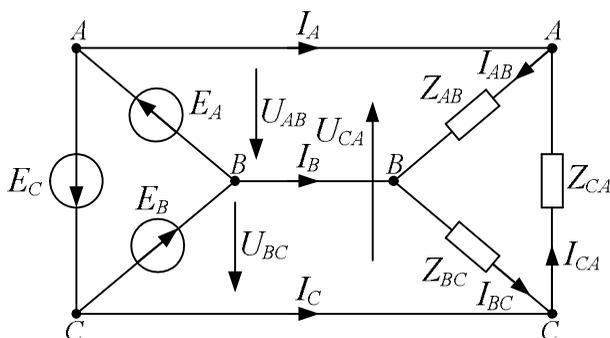


Рис. 13.7. Трехфазная цепь при соединении генератора и приемника треугольником

Каждая фаза генератора и каждая фаза приемника включены между двумя линейными проводами. Поэтому при соединении фаз треугольником линейное напряжение равно фазному напряжению.

Итак, обмотки генератора могут соединяться как звездой, так и треугольником. Однако на практике обмотки генераторов соединяются только звездой. Это связано с тем, что при соединении треугольником при отклонении ЭДС фаз источника от синусоидальной формы или от симметричной системы сумма мгновенных ЭДС не будет равна нулю. Следствием этого даже в режиме холостого хода будут возникать токи, ухудшающие рабочие характеристики генератора.

Если соединение обмоток генератора выполнено неправильно, т. е. в одну точку соединены концы или начала только двух фаз, то суммарная ЭДС в контуре треугольника отлична от нуля, равна ЭДС фазы, что вызывает большой ток. Это аварийный режим для источника питания.

При соединении обмоток треугольником фазное напряжение равно линейному, что требует усиления изоляции фаз.

### 13.5. Расчет симметричных трехфазных цепей

Трехфазный приемник называют симметричным, если комплексные сопротивления всех фаз одинаковы. Если к симметричному трехфазному приемнику приложена симметричная система напряжений, то получается симметричная система токов. Режим

трехфазной цепи, при котором трехфазные системы напряжений и токов симметричны, называется *симметричным*.

Допустим, в схеме, приведенной на рисунке 13.4,  $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C$ .

Для расчета токов в фазах приемника используем закон Ома:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{AN_1}}{\underline{Z}_A}.$$

Обычно заданными являются напряжения источника питания, а не приемника. Для контура  $AN_1NA$  (см. рис. 13.4) составим уравнение по второму закону Кирхгофа:  $\dot{U}_{AN_1} - \dot{U}_A = 0$ , поэтому  $\dot{U}_{AN_1} = \dot{U}_A$ , аналогично

$$\dot{U}_{BN_1} = \dot{U}_B = \dot{U}_A e^{-j120^\circ}; \quad \dot{U}_{CN_1} = \dot{U}_C = \dot{U}_A e^{j120^\circ}.$$

Напряжения на фазах приемника равны соответствующим напряжениям на фазах генератора, поэтому

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_A}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{\dot{U}_A e^{-j120^\circ}}{\underline{Z}_A} = \dot{I}_A e^{-j120^\circ};$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{\dot{U}_A e^{j120^\circ}}{\underline{Z}_A} = \dot{I}_A e^{j120^\circ}.$$

Токи в фазах приемника равны по величине и сдвинуты по фазе на  $120^\circ$ , поэтому расчет можно выполнить для одной фазы (обычно это фаза  $A$  приемника).

Ток в нейтральном проводе определяют, используя первый закон Кирхгофа:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \dot{I}_A (1 + e^{-j120^\circ} + e^{j120^\circ}) = 0.$$

В симметричном режиме работы трехфазной цепи ток в нейтральном проводе равен нулю. К симметричным приемникам относятся трехфазные электродвигатели, трехфазные нагревательные устройства. При соединении этих приемников звездой нейтральный провод не применяют.

Если в трехфазной цепи в симметричном режиме нейтральный провод отсутствует, то для расчета токов нейтральные точки генератора и приемника в схеме цепи можно соединить нейтральным проводом с сопротивлением  $\underline{Z}_N = 0$ . Это не изменит величин токов в фазах. Расчет токов выполняют для одной фазы.

Аналитический расчет трехфазных цепей рекомендуется сопровождать построением векторных диаграмм.

Для трехфазных цепей чаще используют топографическую диаграмму. Она представляет собой диаграмму комплексных потенциалов точек электрической цепи. Напряжение между двумя любыми точками электрической цепи изображается вектором, соединяющим соответствующие точки диаграммы.

Точку электрической цепи, потенциал которой принят равным нулю, на топографической диаграмме помещают в начало координат. Для электрической цепи это нейтральная точка генератора  $N$  (рис. 13.8).

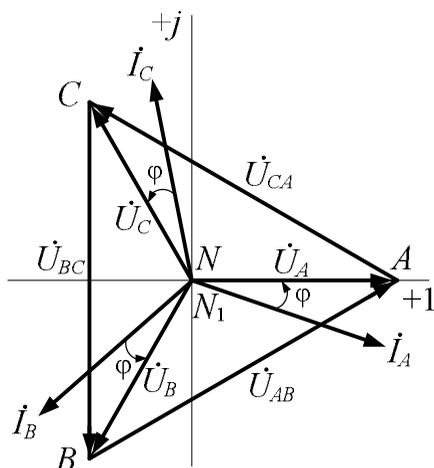


Рис. 13.8. Топографическая диаграмма напряжений и векторная диаграмма токов при симметричном режиме и соединении звездой

На рисунке 13.8 приведены топографическая диаграмма напряжений и векторная диаграмма токов при симметричном режиме и активно-индуктивном характере нагрузки ( $\phi > 0$ ) для цепи, изображенной на рисунке 13.4.

Концы векторов напряжений  $\dot{U}_A$ ,  $\dot{U}_B$ ,  $\dot{U}_C$  соответствуют потенциалам точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  цепи, изображенной на рисунке 13.4. В симметричном режиме точка  $N_1$  на диаграмме будет совпадать с

точкой  $N$ , поскольку их потенциалы одинаковы. Направление векторов напряжений на топографической диаграмме противоположно порядку индексов напряжений, так как по правилу вычитания векторов вектор, равный разности двух векторов, соединяет концы этих векторов и направлен к уменьшаемому:  $\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B$ . В приведенном выражении вектор  $\dot{U}_A$  – уменьшаемое.

**Пример 13.2.** Определить токи в трехфазной цепи, где генератор и приемник соединены звездой. При этом линейное напряжение генератора  $U_{\text{л}} = 380$  В, а сопротивления фаз приемника  $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = 4 + j3$  Ом. Построить векторную диаграмму фазных напряжений и токов.

**Решение.** Поскольку режим работы трехфазной цепи симметричный (комплексные сопротивления фаз приемника одинаковы), расчет ведут на одну фазу. Так как фазные токи равны, их равенство можно записать в виде

$$I_A = I_B = I_C = I_{\phi}.$$

По закону Ома ток фазы  $A$  определяется следующим выражением:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{AN_1}}{\underline{Z}_A}.$$

Здесь  $\dot{U}_{AN_1} = \dot{U}_A$ , так как  $\dot{U}_{N_1N} = 0$ .

Фазное напряжение генератора определим по выражению

$$U_{\phi} = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В}.$$

Приняв начальную фазу напряжения  $U_A$  за нуль, комплексное значение напряжения записываем в следующем виде:

$$\dot{U}_A = U_{\phi} = 220 \text{ В},$$

тогда

$$\dot{I}_A = \frac{220}{4 + j3} = 35,2 - j26,4 \text{ А}.$$

Действующее значение тока в фазе  $A$

$$I_A = \sqrt{35,2^2 + 26,4^2} = 44 \text{ А}.$$

Строим векторную диаграмму фазных напряжений и токов (рис. 13.9).

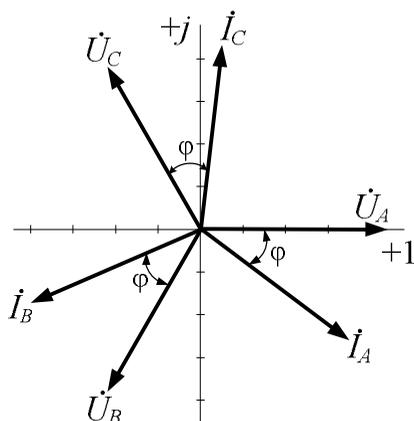


Рис. 13.9. Векторная диаграмма фазных напряжений и токов

Рассмотрим симметричный режим трехфазной цепи при соединении приемников треугольником (см. рис. 13.7).

Так как система линейных напряжений симметрична, а комплексные сопротивления фаз приемника равны между собой, в цепи создается симметричная система фазных и линейных токов, т. е. фазные токи будут равны и смещены друг от друга на  $120^\circ$ . Следовательно, расчет фазного тока приемника достаточно выполнить для одной фазы (обычно это фаза  $AB$ ) по закону Ома для действующих значений

$$I_{AB} = \frac{U_{AB}}{\sqrt{R_{AB}^2 + X_{AB}^2}}$$

или для комплексных значений

$$\dot{i}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{R_{AB} + jX_{AB}}.$$

Для определения соотношения между линейными и фазными токами в симметричном режиме и при соединении треугольником построим векторные диаграммы напряжений и токов (рис. 13.10).

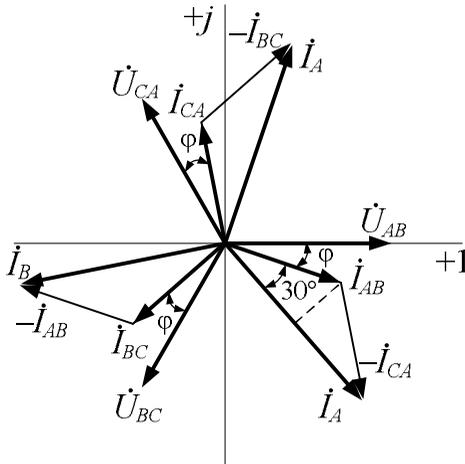


Рис. 13.10. Векторные диаграммы напряжений и токов при симметричном режиме для схемы, изображенной на рисунке 13.7

При построении диаграммы напряжений допускают, что начальная фаза  $\psi_{U_{AB}}$  напряжения  $\dot{U}_{AB}$  равна нулю. Характер нагрузки в этом случае принят активно-индуктивный. Поэтому фазные токи отстают от соответствующих фазных напряжений на угол  $\varphi$ . Для построения векторов линейных токов использованы выражения

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = \dot{I}_{AB} + (-\dot{I}_{CA}), \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} + (-\dot{I}_{AB}), \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} + (-\dot{I}_{BC}).$$

Из вершины тупого угла равнобедренного треугольника со сторонами  $\dot{I}_{AB}$ ,  $-\dot{I}_{CA}$ ,  $\dot{I}_A$  опустим перпендикуляр на вектор  $\dot{I}_A$ . Тупой угол между векторами двух фазных токов равен  $120^\circ$ , значит, и острый угол равен  $30^\circ$ . Следовательно, из прямоугольного треугольника получаем

$$\frac{1}{2} I_A = I_{AB} \cos 30^\circ = I_{AB} \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{или } I_L = \sqrt{3} I_\Phi.$$

---

---

Таким образом, при симметричной нагрузке приемника, соединенного треугольником, после определения фазного тока  $I_{\phi} = I_{AB}$  определяем линейный по соотношению  $I_{л} = \sqrt{3}I_{\phi}$ .

**Пример 13.3.** В трехфазную сеть с линейным напряжением 220 В и частотой 50 Гц включен приемник, который соединен треугольником и имеет одинаковую нагрузку, по фазам состоящую из катушки с индуктивностью  $L = 0,3$  Гн и последовательно включенного с ней резистора с активным сопротивлением 20 Ом. Определить действующие значения линейных и фазных токов.

**Решение.** Для соединения треугольником фазное напряжение равно линейному:  $U_{\phi} = U_{л} = 220$  В. Полное сопротивление нагрузки в фазе

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{20^2 + (2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,3)^2} = 96 \text{ Ом.}$$

Здесь  $\omega = 2\pi f$ .

Ток в фазе

$$I_{\phi} = \frac{U_{\phi}}{Z} = \frac{220}{96} = 2,3 \text{ А.}$$

Поскольку режим нагрузки симметричный, то

$$I_{л} = \sqrt{3}I_{\phi} = \sqrt{3} \cdot 2,3 = 3,98 \approx 4 \text{ А.}$$



### Вопросы и задачи для самоконтроля

1. Дайте определение трехфазной цепи.
2. Изложите основные принципы получения трехфазной системы ЭДС.
3. Поясните, что понимают под фазой в трехфазной цепи.
4. Запишите мгновенные и комплексные значения ЭДС трехфазного генератора, систему фазных и линейных напряжений генератора, фазы которого соединены по схеме звезда.
5. Приведите графическое изображение системы фазных и линейных напряжений генератора при соединении звездой.
6. Назовите соотношения между фазными и линейными напряжениями, токами при соединении звездой.

7. Объясните назначение нейтрального провода.
8. Дайте определение трехфазной симметричной системы ЭДС.
9. В каком случае трехфазный приемник является симметричным?
10. Когда имеет место симметричный режим трехфазной цепи?
11. В симметричной трехфазной цепи приемник соединен звездой. Сопротивление фазы приемника  $R_\phi = 10$  Ом, линейный ток  $I_\Delta = 22$  А. Определите линейное напряжение. Ответ:  $U_\Delta = 380$  В.
12. Расскажите, как соединяют фазы приемника треугольником.
13. Запишите соотношения между линейными и фазными напряжениями и токами при соединении приемника треугольником в симметричном режиме.
14. В симметричной трехфазной цепи приемник соединен треугольником, сопротивление фазы приемника  $R_\phi = 10$  Ом, линейный ток  $I_\Delta = 38$  А. Определите напряжение на фазе приемника. Ответ:  $U_\phi = 220$  В.
15. Объясните, почему при симметричном режиме трехфазной цепи расчет можно вести на одну фазу.
16. Выполните построение векторной диаграммы напряжений и токов при схемах соединения звездой, треугольником.
17. Трехфазные симметричный приемник и генератор соединены звездой с нейтральным проводом. Линейное напряжение равно  $U_\Delta = \sqrt{3} \cdot 380$  В. Произошел обрыв одной фазы. Чему после этого будет равно фазное напряжение на остальных фазах приемника? Ответ: 380 В.
18. Трехфазные симметричный приемник и генератор соединены звездой. Чему равно отношение линейного тока к фазному току приемника? Ответ:  $\sqrt{3}$ .
19. Трехфазные симметричный приемник и генератор соединены звездой без нейтрального провода. Линейное напряжение равно  $U_\Delta = 380$  В. Произошло короткое замыкание одной фазы приемника. Чему будет равно напряжение на остальных фазах приемника? Ответ: 380 В.
20. Трехфазные симметричный приемник и генератор соединены треугольником. Фазный ток приемника равен  $I_\phi = \sqrt{3}$  А. Чему равен линейный ток приемника? Ответ: 3 А.

---

---

21. Трехфазные симметричный приемник и генератор соединены звездой. Линейное напряжение равно  $U_{\text{л}} = \sqrt{3} \cdot 127 \text{ В}$ . Чему равно фазное напряжение приемника? Ответ: 127 В.

22. Трехфазные симметричный приемник и генератор соединены треугольником. Чему равно соотношение линейного и фазного напряжений в приемнике? Ответ: 1.

23. Трехфазные симметричный приемник и генератор соединены треугольником. Линейное напряжение равно  $U_{\text{л}} = 380 \text{ В}$ . Произошел обрыв одной фазы приемника. Чему будет равно напряжение на остальных фазах приемника? Ответ: 380 В.

## 14. ТРЕХФАЗНЫЕ НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЦЕПИ

### 14.1. Расчет несимметричной трехфазной цепи при соединении источника и приемника звездой

Рассмотрим расчет токов в трехфазной четырехпроводной цепи (рис. 14.1).

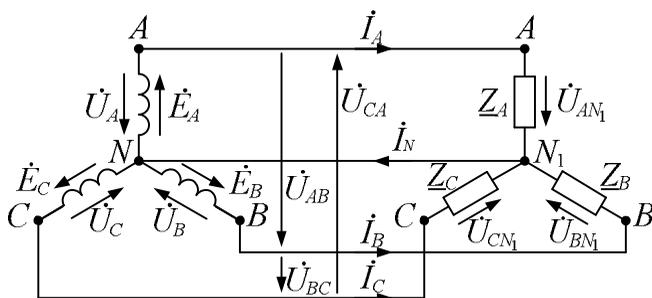


Рис. 14.1. Трехфазная четырехпроводная цепь

Допустим,  $Z_A \neq Z_B \neq Z_C$ , т. е. приемник несимметричный. Сопротивление нейтрального провода мало и им можно пренебречь:  $Z_N = 0$ .

По второму закону Кирхгофа для контура  $AN_1NA$  (см. рис. 14.1) составим уравнение:  $-\dot{U}_A + \dot{U}_{AN_1} = 0$ , откуда  $\dot{U}_{AN_1} = \dot{U}_A$ . Аналогично  $\dot{U}_{BN_1} = \dot{U}_B$ ,  $\dot{U}_{CN_1} = \dot{U}_C$ , т. е. напряжения на фазах приемника равны напряжениям на фазах генератора.

Токи в фазах приемника определяем по закону Ома:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{AN_1}}{Z_A} = \frac{\dot{U}_A}{Z_A}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{BN_1}}{Z_B} = \frac{\dot{U}_B}{Z_B}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{CN_1}}{Z_C} = \frac{\dot{U}_C}{Z_C}.$$

Ток в нейтральном проводе  $\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$ .

Анализируя трехфазную цепь при соединении звездой с нейтральным проводом, приходим к выводу, что изменение нагрузки в любой фазе приводит к изменению тока в данной фазе и тока в нейтральном проводе. Приемники работают по этой схеме независимо друг от друга, как и в схемах с электрически несвязанными фазами.

**Пример 14.1.** Определить токи в трехфазной цепи (см. рис. 14.1), если фазное напряжение генератора  $U_\phi = 220$  В, сопротивления фаз приемника:  $Z_A = 10$  Ом,  $Z_B = j10$  Ом,  $Z_C = -j10$  Ом, сопротивление нейтрального провода  $Z_N = 0$  Ом. Построить топографическую диаграмму напряжений и векторную диаграмму токов.

**Решение.** Если  $Z_N = 0$ , то фазные напряжения генератора равны фазным напряжениям приемника:

$$\dot{U}_A = \dot{U}_{AN_1} = U_\phi = 220 \text{ В};$$

$$\dot{U}_B = \dot{U}_{BN_1} = \dot{U}_A e^{-j120^\circ} = 220 (-0,5 - j0,866) = -110 - j190 \text{ В};$$

$$\dot{U}_C = \dot{U}_{CN_1} = \dot{U}_A e^{j120^\circ} = 220 (-0,5 + j0,866) = -110 + j190 \text{ В}.$$

Токи в фазах приемника находим по закону Ома:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{AN_1}}{Z_A} = \frac{220}{10} = 22 \text{ А, действующее значение } I_A = 22 \text{ А};$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{BN_1}}{Z_B} = \frac{-110 - j190}{j10} = -19 + j11 \text{ А, } I_B = \sqrt{19^2 + 11^2} = 22 \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{CN_1}}{Z_C} = \frac{-110 + j190}{-j10} = -19 - j11 \text{ А, } I_C = \sqrt{19^2 + 11^2} = 22 \text{ А}.$$

Ток в нейтральном проводе

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 22 - 19 + j11 - 19 - j11 = -16 \text{ А, } I_N = 16 \text{ А}.$$

При построении топографической диаграммы напряжений и векторной диаграммы токов (рис. 14.2) на комплексной плоскости в масштабе откладывают векторы напряжений ( $\dot{U}_A$ ,  $\dot{U}_B$ ,  $\dot{U}_C$ ,  $\dot{U}_{AB}$ ,  $\dot{U}_{BC}$ ,  $\dot{U}_{CA}$ ) и токов ( $\dot{I}_A$ ,  $\dot{I}_B$ ,  $\dot{I}_C$ ,  $\dot{I}_N$ ).

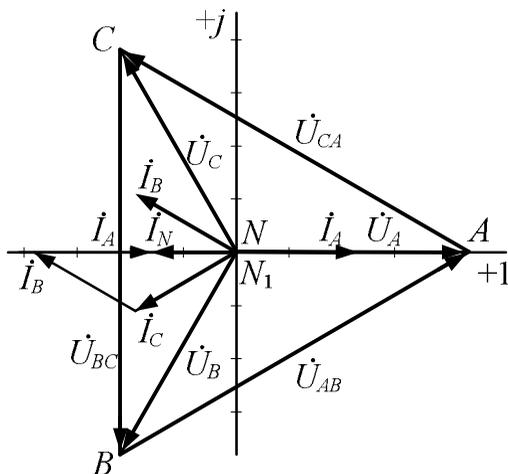


Рис. 14.2. Топографическая диаграмма напряжений и векторная диаграмма токов

Рассмотрим трехфазную цепь, приемник и генератор которой соединены звездой без нейтрального провода при несимметричной нагрузке фаз приемника:  $Z_A \neq Z_B \neq Z_C$  (рис. 14.3).

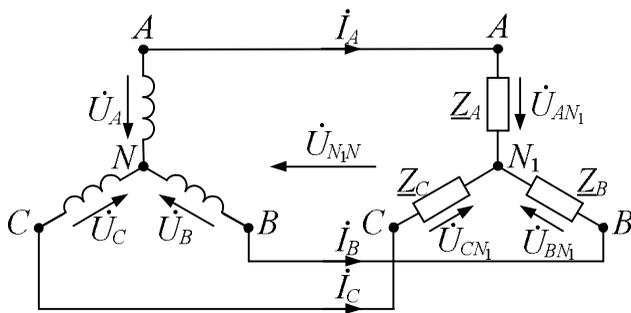


Рис. 14.3. Трехфазная цепь при соединении фаз генератора и приемника звездой без нейтрального провода

При неравномерной нагрузке фазные напряжения приемников для цепи (см. рис. 14.3) будут отличаться от фазных напряжений генератора, так как между нейтральными точками существует напряжение  $U_{N_1N}$ , называемое напряжением смещения нейтрали.

По второму закону Кирхгофа для контура  $AN_1NA$  (см. рис. 14.3)

$$-\dot{U}_A + \dot{U}_{AN_1} + \dot{U}_{N_1N} = 0,$$

откуда

$$\dot{U}_{AN_1} = \dot{U}_A - \dot{U}_{N_1N}. \quad (14.1)$$

Аналогично для других фазных напряжений

$$\dot{U}_{BN_1} = \dot{U}_B - \dot{U}_{N_1N}; \quad (14.2)$$

$$\dot{U}_{CN_1} = \dot{U}_C - \dot{U}_{N_1N}. \quad (14.3)$$

Очевидно, что, определив напряжение смещения нейтрали, можно определить фазные напряжения приемника.

Напряжение между нейтральными точками  $\dot{U}_{N_1N}$  можно определить, используя метод двух узлов. Поскольку фазные напряжения генератора равны фазным ЭДС, получим следующее выражение:

$$\dot{U}_{N_1N} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_A + \dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}. \quad (14.4)$$

Напряжения на фазах приемника определяем по выражениям (14.1)–(14.3). После этого по закону Ома находим токи:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{AN_1}}{\underline{Z}_A}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{BN_1}}{\underline{Z}_B}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{CN_1}}{\underline{Z}_C}.$$

В связи с отсутствием нейтрального провода

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0.$$

Построим топографическую диаграмму напряжений трехфазной цепи (рис. 14.4).

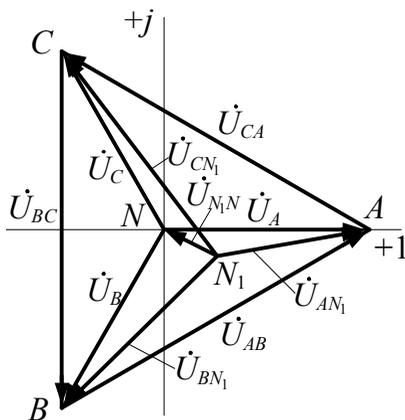


Рис. 14.4. Топографическая диаграмма напряжений цепи, изображенной на рисунке 14.3

Положение точки  $N_1$  на диаграмме (см. рис. 14.4) определяется значением вектора  $\dot{U}_{N_1N}$ . На топографической диаграмме видно, что напряжения на фазах приемника  $\dot{U}_{AN_1}$ ,  $\dot{U}_{BN_1}$ ,  $\dot{U}_{CN_1}$  различны по величине из-за наличия напряжения  $\dot{U}_{N_1N}$ . Поскольку все приемники рассчитаны на стандартное (номинальное) напряжение, их эксплуатация в этом случае невозможна.

**Пример 14.2.** Определить токи в трехфазной цепи. Приемник и генератор соединены звездой без нейтрального провода ( $Z_N = \infty$ ). Фазное напряжение генератора  $U_\phi = 220$  В, сопротивления фаз  $Z_A = 10$  Ом,  $Z_B = j10$  Ом,  $Z_C = -j10$  Ом.

**Решение.** Поскольку нагрузка несимметрична, отсутствует нейтральный провод, появляется напряжение между нейтральными точками приемника и генератора, которое определяется по выражению

$$\dot{U}_{N_1N} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_A + \dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} =$$

$$= \frac{220 \frac{1}{10} + (-110 - j190) \frac{1}{j10} + (-110 + j190) \frac{1}{(-j10)}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{j10} - \frac{1}{j10}} = -160 \text{ В.}$$

Напряжения на фазах приемника равны:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{AN_1} &= \dot{U}_A - \dot{U}_{N_1N} = 220 + 160 = 380 \text{ В;} \\ \dot{U}_{BN_1} &= \dot{U}_B - \dot{U}_{N_1N} = -110 - j190 + 160 = 50 - j190 \text{ В;} \\ \dot{U}_{CN_1} &= \dot{U}_C - \dot{U}_{N_1N} = -110 + j190 + 160 = 50 + j190 \text{ В.}\end{aligned}$$

Фазные токи равны:

$$\begin{aligned}\dot{I}_A &= \frac{\dot{U}_{AN_1}}{\underline{Z}_A} = \frac{380}{10} = 38 \text{ А, действующее значение } I_A = 38 \text{ А;} \\ \dot{I}_B &= \frac{\dot{U}_{BN_1}}{\underline{Z}_B} = \frac{50 - j190}{j10} = -19 - j5 \text{ А, } I_B = \sqrt{19^2 + 5^2} = 19,6 \text{ А;} \\ \dot{I}_C &= \frac{\dot{U}_{CN_1}}{\underline{Z}_C} = \frac{50 + j190}{-j10} = -19 + j5 \text{ А, } I_C = \sqrt{19^2 + 5^2} = 19,6 \text{ А.}\end{aligned}$$

Проверку расчета токов проводят согласно первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0; 38 - 19 - j5 - 19 + j5 = 0.$$

Если трехфазная цепь четырехпроводна с ощутимым сопротивлением нейтрального провода ( $\underline{Z}_N \neq 0$ ) и несимметричным приемником, то порядок расчета такой же, как и для случая  $\underline{Z}_N = \infty$ , т. е. при отсутствии нейтрального провода согласно выражениям (14.1)–(14.3). Отличие – в формуле определения напряжения  $\dot{U}_{N_1N}$  (14.4) в том, что в формуле (14.5) учитывается комплексная проводимость нейтрального провода:

$$\dot{U}_{N_1N} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_A + \dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_{N_1}}. \quad (14.5)$$

Из рассмотренных примеров расчета трехфазных цепей при соединении фаз звездой можно сделать некоторые выводы: из равен-

ства  $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$ , справедливого для трехпроводной цепи (соединение звездой без нейтрального провода), следует, что изменение сопротивления в какой-либо фазе приведет к изменению тока в двух других фазах, при которых сумма векторов трех токов будет равна нулю. Это изменение токов происходит за счет изменения фазных напряжений или, как говорят, перекоса фазных напряжений, причем на фазе с меньшей нагрузкой действует повышенное напряжение, а на фазах с большей нагрузкой – пониженное, что нежелательно. Значительный перекося напряжений наблюдается при неоднородной нагрузке (сопротивления фаз различны по характеру), при этом фазные напряжения могут превышать по значению линейные.

Соединение приемников звездой без нейтрального провода применяется только тогда, когда заведомо известно, что приемник симметричный, например трехфазный электродвигатель.

Для обеспечения симметричной системы фазных напряжений приемника при несимметричной нагрузке используют нейтральный провод, который служит для уравнивания потенциалов нейтральной точки генератора с нейтральной точкой приемника, обеспечивая тем самым генераторное напряжение на нагрузке. Система фазных напряжений генератора симметрична при любой нагрузке. Сопротивление нейтрального провода должно быть весьма малым, так как при его наличии возможно появление напряжения смещения нейтрали ( $\dot{U}_{N_1N} = \dot{I}_N Z_N$ ).

В нейтральном проводе запрещена установка предохранителей или выключателей, чтобы избежать его отключения.

## 14.2. Расчет несимметричной трехфазной цепи при соединении приемников треугольником

Трехфазный приемник соединяют треугольником, когда его фазы рассчитаны на напряжение, равное линейному напряжению трехфазной цепи (рис. 14.5).

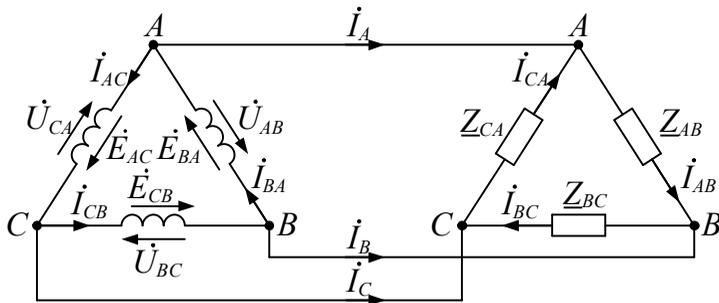


Рис. 14.5. Трехфазная цепь при соединении фаз генератора и приемника треугольником

При несимметричной нагрузке  $\underline{Z}_{AB} \neq \underline{Z}_{BC} \neq \underline{Z}_{CA}$  для определения фазных токов используют закон Ома в комплексной форме, предварительно записав систему линейных напряжений генератора:

$$\dot{U}_{AB} = U_{AB}; \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_{AB} e^{-j120^\circ}; \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_{AB} e^{-j120^\circ}.$$

Токи в фазах:

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}}; \quad \dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}}; \quad \dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}}. \quad (14.6)$$

Линейные токи определяют на основании первого закона Кирхгофа:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}. \quad (14.7)$$

**Пример 14.3.** Несимметричный трехфазный приемник, соединенный треугольником (см. рис. 14.5), имеет  $\underline{Z}_{AB} = 10 \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}_{BC} = 6 + j8 \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}_{CA} = 6 - j8 \text{ Ом}$ . Напряжение сети  $U_{\text{л}} = 200 \text{ В}$ . Определить линейные токи, построить векторную диаграмму напряжений и токов.

**Решение.** Поскольку фазные напряжения равны линейным, то их комплексы равны:

$$\dot{U}_{AB} = 200 \text{ В}; \quad \dot{U}_{BC} = 200 e^{-j120^\circ} \text{ В}; \quad \dot{U}_{CA} = 200 e^{j120^\circ} \text{ В}.$$

Комплексные фазные токи равны:

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{200}{10} = 20 \text{ А};$$

14. Трехфазные несимметричные цепи

$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} = \frac{200e^{-j120^\circ}}{6 + j8} = \frac{200(-0,5 - j0,866)}{6 + j8} = -19,8 - j2,4 \text{ A};$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}} = \frac{200e^{j120^\circ}}{6 - j8} = \frac{200(-0,5 + j0,866)}{6 - j8} = -19,8 + j2,4 \text{ A}.$$

Действующие значения фазных токов равны:

$$I_{AB} = 20 \text{ A}; I_{BC} = I_{CA} = \sqrt{19,8^2 + 2,4^2} = 20 \text{ A}.$$

Линейные комплексные токи равны:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = 20 + 19,8 - j2,4 = 39,8 - j2,4 \text{ A};$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = -19,8 - j2,4 - 20 = -39,8 - j2,4 \text{ A};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = -19,8 + j2,4 + 19,8 + j2,4 = j4,8 \text{ A}.$$

Действующие значения линейных токов равны:

$$I_A = \sqrt{39,8^2 + 2,4^2} = 39,87 \text{ A}; I_B = \sqrt{39,8^2 + 2,4^2} = 39,87 \text{ A}; I_C = 4,8 \text{ A}.$$

При построении векторной диаграммы напряжений и токов (рис. 14.6) на комплексной плоскости откладывают векторы напряжений ( $\dot{U}_{AB}$ ,  $\dot{U}_{CB}$  и  $\dot{U}_{CA}$ ) и фазных токов ( $\dot{I}_{AB}$ ,  $\dot{I}_{BC}$ ,  $\dot{I}_{CA}$ ). Линейный ток  $\dot{I}_A$  получают суммированием векторов  $\dot{I}_{AB}$  и  $-\dot{I}_{CA}$ , ток  $\dot{I}_B$  – суммированием векторов  $\dot{I}_{BN}$  и  $-\dot{I}_{AB}$ , ток  $\dot{I}_C$  – суммированием векторов  $\dot{I}_{CA}$  и  $-\dot{I}_{BC}$ .

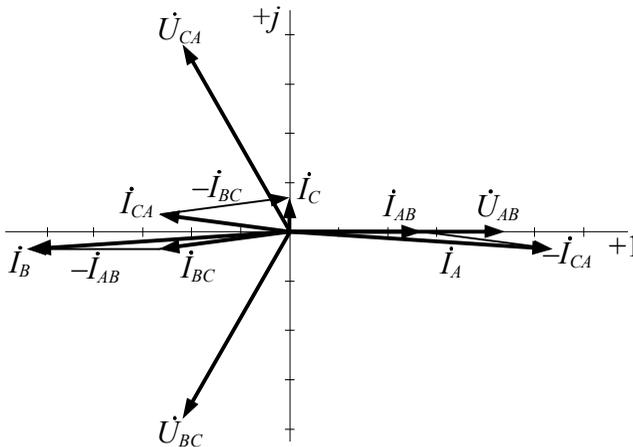


Рис. 14.6

Проанализировав выражения (14.6) и (14.7), следует заметить, что при соединении треугольником фазы приемника работают независимо друг от друга.

Изменение сопротивления в какой-либо фазе приемника вызывает изменение тока только в этой фазе, а также двух линейных токов, между проводами которых находится фаза с измененным сопротивлением.

При обрыве линейного провода трехфазная цепь преобразуется в однофазную, что приводит к уменьшению напряжений на фазах, связанных с данным линейным проводом. Режим работы цепи аварийный.

Если сопротивления линейных проводов не равны нулю (рис. 14.7, а), то из-за падения напряжения в них при соединении приемника треугольником не обеспечивается независимость работы фаз приемника.

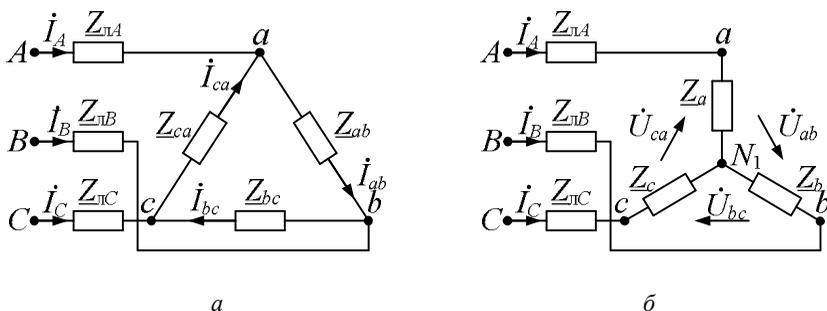


Рис. 14.7. Трехфазная цепь с приемником, соединенным: а – треугольником, б – звездой

В этом случае для расчета цепи (см. рис. 14.7, а) треугольник заменяют эквивалентным соединением звездой (рис. 14.7, б), определяя сопротивление лучей звезды по следующим формулам:

$$\underline{Z}_A = \frac{\underline{Z}_{ab}\underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}};$$

$$\underline{Z}_B = \frac{\underline{Z}_{bc}\underline{Z}_{ab}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}};$$

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{Z}_{ca} \underline{Z}_{bc}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}.$$

При симметричной нагрузке сопротивление луча эквивалентной звезды в 3 раза меньше сопротивления стороны треугольника:

$$\underline{Z}_{\text{ца}} = \frac{\underline{Z}_{\text{од}}}{3}.$$

После замены треугольника звездой получаем цепь с соединением звездой без нейтрального провода и определяем линейные токи. Затем находим линейные напряжения приемника, соединенного звездой, используя второй закон Кирхгофа. После этого определяем фазные токи приемника по закону Ома.

**Пример 14.4.** Определить токи на всех участках цепи при несимметричном режиме (см. рис. 14.7, а), если линейное напряжение генератора  $U_{\text{л}} = 380$  В, комплексные сопротивления линии и комплексные сопротивления фаз приемника, соединенных треугольником, равны:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{лА}} &= 3,02 + j5,855 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{\text{лВ}} = 1,11 + j2,36 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{\text{лС}} = 2,65 + j7,32 \text{ Ом}; \\ \underline{Z}_{\text{аб}} &= 8,85 + j1,75 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{\text{bc}} = 9,94 + j10,25 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{\text{ca}} = 6,43 - j1,31 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

**Решение.** Заменяем приемник, соединенный треугольником, эквивалентным приемником, соединенным звездой (см. рис. 14.7, б), и найдем комплексные сопротивления лучей звезды:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_a &= \frac{\underline{Z}_{\text{аб}} \underline{Z}_{\text{ca}}}{\underline{Z}_{\text{аб}} + \underline{Z}_{\text{bc}} + \underline{Z}_{\text{ca}}} = \frac{(8,85 + j1,75)(6,43 - j1,31)}{8,85 + j1,75 + 9,94 + j10,25 + 6,43 - j1,31} = \\ &= 1,98 - j0,855 \text{ Ом}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_b &= \frac{\underline{Z}_{\text{аб}} \underline{Z}_{\text{bc}}}{\underline{Z}_{\text{аб}} + \underline{Z}_{\text{bc}} + \underline{Z}_{\text{ca}}} = \frac{(8,85 + j1,75)(9,94 + j10,25)}{8,85 + j1,75 + 9,94 + j10,25 + 6,43 - j1,31} = \\ &= 3,89 + j2,646 \text{ Ом}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_c &= \frac{\underline{Z}_{\text{bc}} \underline{Z}_{\text{ca}}}{\underline{Z}_{\text{аб}} + \underline{Z}_{\text{bc}} + \underline{Z}_{\text{ca}}} = \frac{(9,94 + j10,25)(6,43 - j1,31)}{8,85 + j1,75 + 9,94 + j10,25 + 6,43 - j1,31} = \\ &= 3,35 + j0,68 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Заменим линию и приемник одним эквивалентным приемником, соединенным звездой (рис. 14.8).

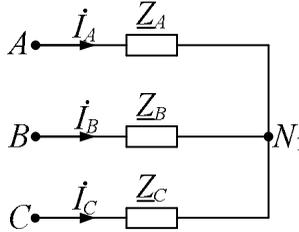


Рис. 14.8

При этом:

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_{лА} + \underline{Z}_a = 3,02 + j5,855 + 1,98 - j0,855 = 5 + j5 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_B = \underline{Z}_{лВ} + \underline{Z}_b = 1,11 + j2,36 + 3,89 + j2,646 = 5 + j5 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_C = \underline{Z}_{лС} + \underline{Z}_c = 2,65 + j7,32 + 3,35 + j0,68 = 6 + j8 \text{ Ом}.$$

Рассчитываем полученную трехфазную цепь (см. рис. 14.8), для чего определяем напряжение  $\dot{U}_{N_1N}$ :

$$\dot{U}_{N_1N} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_A + \dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C},$$

где

$$\dot{U}_A = \frac{U_n}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В};$$

$$\dot{U}_B = \dot{U}_A e^{-j120^\circ} = 220e^{-j120^\circ} = -110 - j190 \text{ В};$$

$$\dot{U}_C = \dot{U}_A e^{j120^\circ} = 220e^{j120^\circ} = -110 + j190 \text{ В};$$

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A} = \frac{1}{5 + j5} = 0,1 - j0,1 \text{ См}; \quad \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{6 + j8} = 0,06 - j0,08 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_B = \underline{Y}_A = 0,1 - j0,1 \text{ См};$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{N_1N} &= \frac{220(0,1 - j0,1) + 220e^{-j120^\circ} (0,1 - j0,1) + 220e^{j120^\circ} (0,06 - j0,08)}{0,1 - j0,1 + 0,1 - j0,1 + 0,06 - j0,08} = \\ &= 19,86 - j16,3 \text{ В}. \end{aligned}$$

#### 14. Трехфазные несимметричные цепи

Определяем фазные напряжения эквивалентного приемника:

$$\dot{U}_{AN_1} = \dot{U}_A - \dot{U}_{N_1N} = 220 - 19,86 + j16,3 = 200,14 + j16,3 \text{ В};$$

$$\dot{U}_{BN_1} = \dot{U}_B - \dot{U}_{N_1N} = -110 - j190 - 19,86 + j16,3 = -129,86 - j173,7 \text{ В};$$

$$\dot{U}_{CN_1} = \dot{U}_C - \dot{U}_{N_1N} = -110 + j190 - 19,86 + j16,3 = -129,86 + j206,3 \text{ В}.$$

Определяем токи  $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ :

$$\dot{I}_A = \dot{U}_{AN_1} \underline{Y}_A = (200,14 + j16,3)(0,1 - j0,1) = 21,644 - j18,384 \text{ А};$$

$$\dot{I}_B = \dot{U}_{BN_1} \underline{Y}_B = (-129,86 - j173,7)(0,1 - j0,1) = -30,356 - j4,384 \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \dot{U}_{CN_1} \underline{Y}_C = (-129,86 + j206,3)(0,06 - j0,08) = 8,7124 + j22,7668 \text{ А}.$$

Проверку значений токов проводят согласно первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0;$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C &= 21,644 - j18,384 - 30,356 - j4,384 + 8,7124 + j22,7668 = \\ &= 0,0004 - j0,0012 \approx 0. \end{aligned}$$

Действующие значения токов:

$$I_A = 28,4 \text{ А}; \quad I_B = 30,7 \text{ А}; \quad I_C = 24,4 \text{ А}.$$

Определяем линейные напряжения  $\dot{U}_{ab}, \dot{U}_{bc}, \dot{U}_{ca}$  на приемнике, соединенном звездой, по второму закону Кирхгофа, используя схему (см. рис. 14.7, б):

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ab} = \dot{I}_A \underline{Z}_a - \dot{I}_B \underline{Z}_b &= (21,644 - j18,384)(1,98 - j0,855) - (-30,356 - j4,384) \times \\ &\times (3,89 + j2,64) = 133,4 + j42,65 \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{bc} = \dot{I}_B \underline{Z}_b - \dot{I}_C \underline{Z}_c &= (-30,356 - j4,384)(3,89 + j2,64) - (8,7124 + j22,7668) \times \\ &\times (3,89 + j2,64) = 133,4 + j42,65 \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ca} = -(\dot{U}_{ab} + \dot{U}_{bc}) &= -(133,4 + j42,65 - 120,185 - j179,57) = \\ &= -13,22 + j136,92 \text{ В}. \end{aligned}$$

По закону Ома определяем токи  $\dot{I}_{ab}, \dot{I}_{bc}, \dot{I}_{ca}$ :

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{133,4 + j42,65}{8,85 + j1,75} = 15,42 + j1,77 \text{ А};$$

$$\dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}} = \frac{-120,185 - j179,57}{9,94 + j10,25} = -14,89 - j2,71 \text{ А};$$

$$\dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}} = \frac{-13,22 + j136,92}{6,43 - j1,31} = -6,14 + j20,05 \text{ А}.$$

---

---

Действующие значения токов:

$$I_{ab} = \sqrt{15,42^2 + 1,77^2} = 15,5 \text{ А}; \quad I_{bc} = \sqrt{14,89^2 + 2,71^2} = 15,2 \text{ А}; \\ I_{ca} = \sqrt{6,14^2 + 20,05^2} = 20,9 \text{ А}.$$

### 14.3. Определение мощности в трехфазных электрических цепях

Активная мощность несимметричной трехфазной цепи равна сумме активных мощностей отдельных ее фаз:

$$P = P_A + P_B + P_C = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C,$$

где  $\varphi_A = \psi_{uA} - \psi_{iA}$ ;  $\varphi_B = \psi_{uB} - \psi_{iB}$ ;  $\varphi_C = \psi_{uC} - \psi_{iC}$ .

Реактивная мощность несимметричной трехфазной цепи

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = U_A I_A \sin \varphi_A + U_B I_B \sin \varphi_B + U_C I_C \sin \varphi_C.$$

Полная мощность несимметричной трехфазной цепи вычисляется по формуле

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Для расчета мощностей несимметричной трехфазной цепи удобно использовать комплексную мощность, которая определяется по формуле

$$\underline{S} = \dot{U}_A I_A^* + \dot{U}_B I_B^* + \dot{U}_C I_C^* = P + jQ,$$

где  $I_A^*$ ,  $I_B^*$ ,  $I_C^*$  – сопряженные комплексные токи соответствующих фаз.

Отличие сопряженного комплексного тока от комплексного – при  $j$  знак меняется на противоположный.

Например,

$$\dot{I}_A = 3 + j4; \quad I_A^* = 3 - j4.$$

Активная мощность симметричной трехфазной цепи

$$P = 3P_\phi = 3 U_\phi I_\phi \cos \varphi.$$

Примем во внимание, что при соединении ветвей приемника звездой

$$U_\phi = \frac{U_\Delta}{\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad I_\phi = I_\Delta, \quad (14.8)$$

а при соединении ветвей приемника треугольником

$$U_{\phi} = U_{л} \quad \text{и} \quad I_{\phi} = \frac{I_{л}}{\sqrt{3}}. \quad (14.9)$$

Подставим соотношения (14.8) и (14.9) в выражение активной мощности и получим выражение (независимо от вида соединения):

$$P = \sqrt{3} U_{л} I_{л} \cos \varphi.$$

Следует отметить, что в выражении (14.9)  $\varphi$  – это сдвиг по фазе между фазным напряжением и током.

Аналогично для реактивной и полной мощностей симметричной трехфазной цепи имеем соответствующие выражения:

$$Q = 3 U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi \quad \text{или} \quad Q = \sqrt{3} U_{л} I_{л} \sin \varphi;$$

$$S = 3 U_{\phi} I_{\phi} \quad \text{или} \quad S = \sqrt{3} U_{л} I_{л}.$$

Определим мгновенную мощность трехфазного приемника при симметричном режиме. Для этого запишем мгновенные значения фазных напряжений и токов, приняв начальную фазу напряжения  $u_A$  равной нулю:

$$u_A = U_{\phi} \sqrt{2} \sin \omega t; \quad i_A = I_{\phi} \sqrt{2} \sin (\omega t - \varphi);$$

$$u_B = U_{\phi} \sqrt{2} \sin \left( \omega t - \frac{2}{3} \pi \right); \quad i_B = I_{\phi} \sqrt{2} \sin \left( \omega t - \frac{2}{3} \pi - \varphi \right);$$

$$u_C = U_{\phi} \sqrt{2} \sin \left( \omega t + \frac{2}{3} \pi \right); \quad i_C = I_{\phi} \sqrt{2} \sin \left( \omega t + \frac{2}{3} \pi - \varphi \right).$$

Затем запишем выражения мгновенной мощности каждой фазы приемника:

$$\begin{aligned} p_A &= u_A i_A = U_{\phi} \sqrt{2} I_{\phi} \sqrt{2} \sin \omega t \sin (\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{U_{\phi} I_{\phi} 2}{2} [\cos (\omega t - \omega t + \varphi) - \cos (2\omega t - \varphi)] = \end{aligned}$$

$$= U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi - U_{\phi} I_{\phi} \cos (2\omega t - \varphi);$$

$$p_B = u_B i_B = U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi - U_{\phi} I_{\phi} \cos \left( 2\omega t - \frac{4}{3} \pi - \varphi \right);$$

$$p_C = u_C i_C = U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi - U_{\phi} I_{\phi} \cos \left( 2\omega t + \frac{4}{3} \pi - \varphi \right).$$

При суммировании мгновенных мощностей трех фаз вторые слагаемые в сумме дадут нуль. Поэтому мгновенная мощность трехфазного приемника при симметричном режиме не зависит от времени и равна активной мощности трехфазной цепи:

$$p = p_A + p_B + p_C = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi = P.$$

Многофазные цепи, в которых мгновенное значение мощности постоянно, называются *уравновешенными*.

Постоянство мгновенных значений мощности создает благоприятные условия для работы генераторов и двигателей (с точки зрения их механической нагрузки), так как отсутствуют пульсации вращающего момента, наблюдающиеся у однофазных генераторов и двигателей.

**Пример 14.5.** В трехфазной цепи приемник соединен звездой с нейтральным проводом. Комплексные сопротивления его фаз:  $\underline{Z}_A = 10 + j10$  Ом;  $\underline{Z}_B = 10$  Ом;  $\underline{Z}_C = j10$  Ом; фазное напряжение генератора равно 100 В;  $\underline{Z}_N = 0$ . Составить баланс активной и реактивной мощностей.

**Решение.** Для определения активной и реактивной мощностей необходимо, используя закон Ома, рассчитать фазные токи, для чего запишем систему фазных напряжений. Если принять начальную фазу напряжения фазы  $A$ , равной нулю ( $\psi_{U_A} = 0$ ), то:

$$\begin{aligned}\dot{U}_A &= U_\phi = 100 \text{ В;} \\ \dot{U}_B &= \dot{U}_A e^{-j120^\circ} = 100e^{-j120^\circ} \text{ В;} \\ \dot{U}_C &= \dot{U}_A e^{j120^\circ} = 100e^{j120^\circ} \text{ В.}\end{aligned}$$

Токи будут равны:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{100}{10 + j10} = 5 - j5 = 7,1e^{-j45^\circ} \text{ А.}$$

Действующее значение  $I_A = 7,1$  А, начальная фаза  $\psi_{i_A} = -45^\circ$ ;

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{100e^{-j120^\circ}}{10} = 10e^{-j120^\circ} \text{ А.}$$

Действующее значение  $I_B = 10$  А, начальная фаза  $\psi_{i_B} = -120^\circ$ ;

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{100e^{j120^\circ}}{j10} = 10e^{j30^\circ} \text{ А.}$$

Действующее значение  $I_C = 10$  А, начальная фаза  $\psi_{i_C} = 30^\circ$ .

Баланс активных мощностей предусматривает соблюдение следующего равенства:

$$P_{\text{ист}} = P_{\text{потр}}.$$

Активную мощность приемника можно определить, используя закон Джоуля – Ленца:

$$P_{\text{потр}} = I_A^2 R_A + I_B^2 R_B = 7,1^2 \cdot 10 + 10^2 \cdot 10 = 1504 \text{ Вт.}$$

Активную мощность генератора определяют по следующему выражению:

$$P_{\text{ист}} = P_A + P_B + P_C = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C.$$

Углы сдвига фаз определяют по начальным фазам напряжения и тока фаз:

$$\varphi_A = \varphi_{u_A} - \varphi_{i_A} = 0 - (-45^\circ) = 45^\circ;$$

$$\varphi_B = \varphi_{u_B} - \varphi_{i_B} = -120^\circ - (-120^\circ) = 0^\circ;$$

$$\varphi_C = \varphi_{u_C} - \varphi_{i_C} = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ;$$

$$P_{\text{ист}} = 100 \cdot 7,1 \cdot \cos 45^\circ + 100 \cdot 10 \cdot \cos 0^\circ + 100 \cdot 7,1 \cdot \cos 90^\circ = 1503 \text{ Вт.}$$

$$1504 \approx 1503.$$

Наблюдаем баланс активных мощностей.

Баланс реактивных мощностей предусматривает соблюдение следующего равенства:

$$Q_{\text{ист}} = Q_{\text{потр}},$$

где

$$Q_{\text{потр}} = I_A^2 X_A + I_C^2 X_C = 7,1^2 \cdot 10 + 10^2 \cdot 10 = 1504 \text{ вар};$$

$$Q_{\text{ист}} = U_A I_A \sin \varphi_A + U_B I_B \sin \varphi_B + U_C I_C \sin \varphi_C = 100 \cdot 7,1 \sin 45^\circ + 100 \cdot 10 \sin 0^\circ + 100 \cdot 10 \sin 90^\circ = 1503 \text{ вар.}$$

$$1504 \approx 1503.$$

Наблюдаем баланс реактивных мощностей.

#### 14.4. Симметричные составляющие несимметричной трехфазной цепи. Метод симметричных составляющих

Для анализа и расчетов несимметричных режимов в трехфазных цепях широко применяют метод симметричных составляющих. Он основан на представлении любой трехфазной несиммет-

ричной системы величин (токов, напряжений, магнитных потоков) в виде суммы трех симметричных систем: прямой, обратной и нулевой последовательностей.

Допустим, что имеется несимметричная система токов  $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ . Величины, относящиеся к системам прямой, обратной и нулевой последовательностей, отметим соответственно индексами 1, 2 и 0. На рисунке 14.9 показаны векторные диаграммы симметричных составляющих токов всех трех последовательностей.

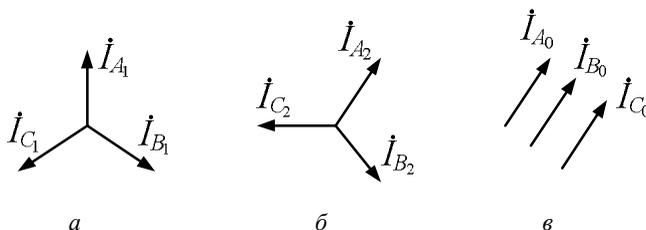


Рис. 14.9. Векторные диаграммы симметричных систем токов прямой (а), обратной (б) и нулевой (в) последовательностей

Система токов прямой последовательности (рис. 14.9, а) состоит из трех векторов, равных по величине, и имеет порядок следования фаз  $A, B, C$ . Система токов обратной последовательности (рис. 14.9, б) состоит из трех векторов, равных по величине, и имеет порядок следования фаз  $A, C, B$ . Система токов нулевой последовательности (рис. 14.9, в) образована тремя векторами, совпадающими по фазе. Для этих трех систем можно записать следующие выражения:

$$\dot{I}_{B_1} = \dot{I}_{A_1} e^{-j120^\circ}; \quad \dot{I}_{C_1} = \dot{I}_{A_1} e^{j120^\circ};$$

$$\dot{I}_{B_2} = \dot{I}_{A_2} e^{j120^\circ}; \quad \dot{I}_{C_2} = \dot{I}_{A_2} e^{-j120^\circ};$$

$$\dot{I}_{A_0} = \dot{I}_{B_0} = \dot{I}_{C_0}.$$

Комплексное число  $e^{j120^\circ}$  называется *фазным множителем* и сокращенно обозначается буквой  $a$ :

$$a = e^{j120^\circ} = \cos 120^\circ + j \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Умножение вектора на  $a$  соответствует повороту его против направления движения часовой стрелки на  $120^\circ$ .

Комплексное число

$$e^{-j120^\circ} = e^{j240^\circ} = e^{j120^\circ} e^{j120^\circ} = a^2;$$

$$a^2 = e^{-j120^\circ} = \cos 120^\circ - j \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Умножение вектора на  $a^2$  соответствует повороту его по направлению движения часовой стрелки на  $120^\circ$ .

При помощи фазного множителя симметричные составляющие прямой и обратной последовательностей можно записать следующим образом:

$$\dot{I}_{A_1}; \dot{I}_{B_1} = a^2 \dot{I}_{A_1}; \dot{I}_{N_1} = a \dot{I}_{A_1};$$

$$\dot{I}_{A_2}; \dot{I}_{B_2} = a \dot{I}_{A_2}; \dot{I}_{N_2} = a^2 \dot{I}_{A_2}.$$

Кроме того,  $a^3 = e^{j360^\circ} = 1$ .

Следовательно,  $a^4 = a^3 a = a$ ;  $a^5 = a^3 a^2 = a^2$  и т. д. При этом  $1$ ,  $a$  и  $a^2$  образуют симметричную систему единичных векторов (рис. 14.10). Их сумма равна нулю, т. е.

$$1 + a + a^2 = 0. \quad (14.10)$$

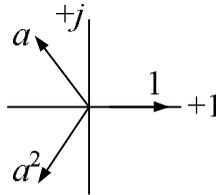


Рис. 14.10. Симметричная система единичных векторов

Докажем, что любую несимметричную систему (например, токов  $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ ) можно разложить на симметричные системы прямой, обратной и нулевой последовательностей. Если это имеет место, то

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{A_1} + \dot{I}_{A_2} + \dot{I}_{A_0};$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{B_1} + \dot{I}_{B_2} + \dot{I}_{B_0};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{C_1} + \dot{I}_{C_2} + \dot{I}_{C_0}.$$

Запишем эти равенства, выразив симметричные составляющие токов в фазах  $B$  и  $C$  через симметричные составляющие тока в фазе  $A$ :

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{A_1} + \dot{I}_{A_2} + \dot{I}_{A_0}; \quad (14.11)$$

$$\dot{I}_B = a^2 \dot{I}_{A_1} + a \dot{I}_{A_2} + \dot{I}_{A_0}; \quad (14.12)$$

$$\dot{I}_C = a \dot{I}_{A_1} + a^2 \dot{I}_{A_2} + \dot{I}_{A_0}. \quad (14.13)$$

Из полученных трех уравнений однозначно можно определить токи  $\dot{I}_{A_1}$ ,  $\dot{I}_{A_2}$  и  $\dot{I}_{A_0}$ , что доказывает возможность разложения заданной несимметричной системы токов  $\dot{I}_A$ ,  $\dot{I}_B$ ,  $\dot{I}_C$  на три симметричные системы.

После сложения уравнений (14.11)–(14.13) получим выражение

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = (1 + a^2 + a)\dot{I}_{A_1} + (1 + a + a^2)\dot{I}_{A_2} + 3\dot{I}_{A_0},$$

из которого с учетом уравнения (14.10) найдем выражение для определения тока нулевой последовательности:

$$\dot{I}_{A_0} = \frac{1}{3}(\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C). \quad (14.14)$$

Умножив уравнение (14.12) на  $a$ , уравнение (14.13) на  $a^2$  и сложив полученные уравнения с уравнением (14.11), находим составляющую тока прямой последовательности по выражению

$$\dot{I}_{A_1} = \frac{1}{3}(\dot{I}_A + a\dot{I}_B + a^2\dot{I}_C). \quad (14.15)$$

Умножив уравнение (14.12) на  $a^2$ , уравнение (14.13) на  $a$  и сложив полученные уравнения с уравнением (14.11), находим составляющую тока обратной последовательности по выражению

$$\dot{I}_{A_2} = \frac{1}{3}(\dot{I}_A + a^2\dot{I}_B + a\dot{I}_C). \quad (14.16)$$

Симметричные составляющие других трехфазных систем (напряжений, ЭДС, магнитных потоков) можно найти по уравнениям, аналогичным формулам (14.14)–(14.16).

Формулы (14.14)–(14.16) позволяют найти несимметричную систему токов  $\dot{I}_A$ ,  $\dot{I}_B$ ,  $\dot{I}_C$ , а также других величин (напряжений, ЭДС, магнитных потоков), если известны ее симметричные составляющие.

На рисунке 14.11 показан метод графического нахождения векторов  $\dot{I}_{A_0}$ ,  $\dot{I}_{A_1}$  и  $\dot{I}_{A_2}$  симметричных составляющих тока фазы  $A$  по заданным векторам  $\dot{I}_A$ ,  $\dot{I}_B$ ,  $\dot{I}_C$  несимметричной системы токов. Для графических построений использованы формулы (14.11)–(14.13).

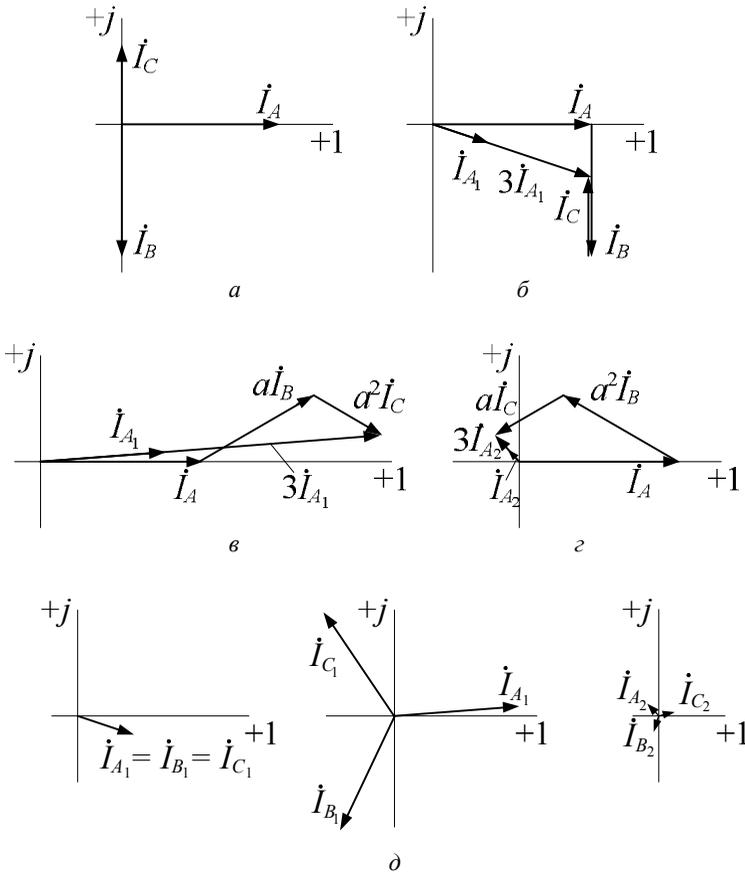


Рис. 14.11. Векторная диаграмма несимметричной системы токов (а); графическое определение составляющих нулевой (б), прямой (в) и обратной (г) последовательностей тока фазы  $A$ ; векторные диаграммы симметричных составляющих токов трех фаз (д)

---

---

Симметричные составляющие токов и напряжений могут быть не только вычислены, но и измерены при помощи специальных электрических измерительных систем, называемых фильтрами симметричных составляющих токов и напряжений. Эти фильтры получили широкое применение в релейной защите электроэнергетических цепей.

Следует обратить внимание на некоторые свойства трехфазных цепей в отношении симметричных составляющих токов и напряжений.

1. В нейтральном проводе ток равен сумме линейных токов и, следовательно, тройному значению составляющей тока нулевой последовательности.

2. Если нейтральный провод отсутствует, линейные токи не содержат составляющей нулевой последовательности, так как векторная сумма линейных токов в любом режиме работы цепи равна нулю.



### Вопросы и задачи для самоконтроля

1. Запишите значения фазного множителя для выражения токов, напряжений прямой и обратной последовательностей.

2. Объясните, как разложить графически несимметричную трехфазную систему величин на три симметричные.

3. Несимметричный трехфазный приемник соединен звездой с нейтральным проводом:  $\underline{Z}_A = 15 \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}_B = 12 \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}_C = 10 \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}_N = 0$ . Фазное напряжение на приемнике равно 120 В. Определите ток в нейтральном проводе и активную мощность приемника. Ответ:  $I_N = 3,45 \text{ А}$ ;  $P = 3600 \text{ Вт}$ .

4. К трехфазному генератору, соединенному звездой и имеющему фазное напряжение, равное 120 В, подключен несимметричный трехфазный приемник, соединенный звездой без нейтрального провода. При этом:  $\underline{Z}_A = 15 \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}_B = 12 \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}_C = 10 \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}_N = \infty$ . Определите напряжения на фазах приемника. Ответ:  $U_{AN_1} = 133 \text{ В}$ ;  $U_{BN_1} = 120 \text{ В}$ ;  $U_{CN_1} = 108 \text{ В}$ .

5. Несимметричный трехфазный приемник соединен треугольником:  $\underline{Z}_{AB} = -j10 \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}_{BC} = 20 \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}_{CA} = -j10 \text{ Ом}$ . Линейное напряжение равно 200 В. Определите линейные токи, активную, реактивную и полную мощности приемника. Ответ:  $I_A = 34,6 \text{ А}$ ;  $I_B = 29 \text{ А}$ ;  $I_C = 12,37 \text{ А}$ ;  $P = 2000 \text{ Вт}$ ;  $Q = -8000 \text{ вар}$ ;  $S = 8246 \text{ ВА}$ .

## 15. ВРАЩАЮЩЕЕСЯ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

### 15.1. Понятие пульсирующего магнитного поля

На рисунке 15.1 условно изображена катушка в виде одного витка в поперечном разрезе. Допустим, что через катушку проходит синусоидальный ток  $i = I_m \sin \omega t$ .

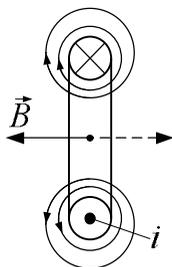


Рис. 15.1. Магнитное поле витка с током

Крестиком и точкой показано положительное направление тока. Вокруг проводника с током создается магнитное поле. Картину магнитного поля графически изображают линиями магнитной индукции  $\vec{B}$ . Направление линий магнитной индукции определяют по правилу правоходового винта. Принятому положительному направлению тока соответствует положительное направление вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ , указанное стрелкой вдоль оси катушки. Когда ток отрицателен, вектор магнитной индукции имеет противоположное направление, показанное на рисунке 15.1 пунктиром.

Таким образом, изменение направления тока в катушке приводит к изменению направления вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  вдоль оси катушки. При этом магнитное поле изменяется (пульсирует) вдоль оси катушки. Такое магнитное поле называется *пульсирующим*. Оно пульсирует во времени с частотой  $\omega$ . Примером создания пульсирующего магнитного поля может служить обмотка однофазного двигателя. Ротор такого двигателя не может вращаться. Чтобы его запустить, нужна дополнительная пусковая обмотка,

---

---

которая создает вращающий момент. При этом пусковая обмотка соединяется последовательно с конденсатором или активным сопротивлением и подключается параллельно рабочей обмотке. Подключение конденсатора или активного сопротивления дает сдвиг фаз между токами в обмотках, близкий к  $90^\circ$ , что вызывает появление вращающегося магнитного поля статора.

Если статор имеет лишь одну обмотку, питаемую от сети синусоидальным током, тогда МДС этой обмотки создает пульсирующий в пространстве магнитный поток, который наводит переменную ЭДС и ток в короткозамкнутой обмотке ротора. МДС статора и ротора будут равны и противоположны по направлению, результирующая МДС равна нулю и, следовательно, пусковой момент равен нулю, ротор не вращается. Однако если ротор при помощи какой-либо посторонней силы привести во вращение, то в дальнейшем он будет вращаться, хотя эта сила будет снята. Он сам увеличит частоту вращения до номинальной и может преодолеть механическое торможение. Это явление можно объяснить, если представить пульсирующее магнитное поле в виде суммы двух вращающихся в противоположных направлениях магнитных полей. Оба магнитных потока создают равные по значению и противоположные по направлению вращающие моменты ротора. Поэтому ротор не может сам прийти в движение. Вращающий момент влево меньше вращающего момента вправо, и ротор будет вращаться вправо. Если придать начальное вращение ротору влево, ротор потом сам будет продолжать вращаться влево. Амплитудные значения МДС вращающихся полей одинаковы и равны половине амплитудного значения МДС пульсирующего поля.

## 15.2. Вращающееся магнитное поле

Одним из основных преимуществ трехфазной системы токов является возможность получения вращающегося магнитного поля, на котором основан принцип действия наиболее распространенных типов двигателей переменного тока.

Ознакомимся с получением вращающегося магнитного поля на примере. Для этого расположим три одинаковые катушки  $AX$ ,  $BY$ ,  $CZ$  под углом  $120^\circ$  относительно друг друга (рис. 15.2, *a*). Катушки подключим соответственно к фазам  $A$ ,  $B$  и  $C$  источника питания. При этом токи в катушках  $i_A$ ,  $i_B$ ,  $i_C$  будут симметричны (рис. 15.2, *б*).

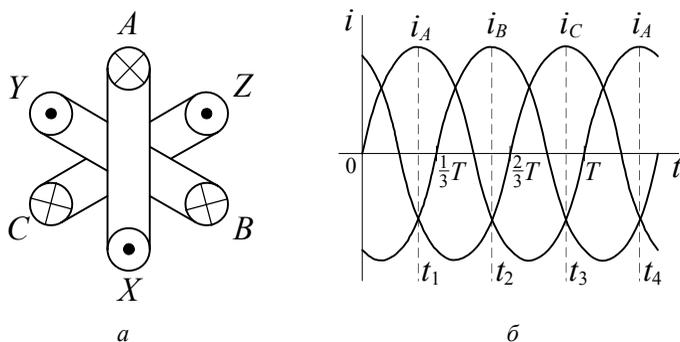


Рис. 15.2. Положительные направления токов в катушках (а) и график симметричной системы токов (б)

Рассмотрим схематические картины магнитного поля для различных, следующих друг за другом моментов времени. Для момента времени  $t = t_1$  (см. рис. 15.2, б) значения токов в катушках будут следующие:  $i_A > 0$ ,  $i_B < 0$ ,  $i_C < 0$ . Направления токов в катушках и схематическая картина магнитного поля, созданного токами трех катушек, показаны на рисунке 15.3, а, где пунктирной линией изображены две магнитные линии.

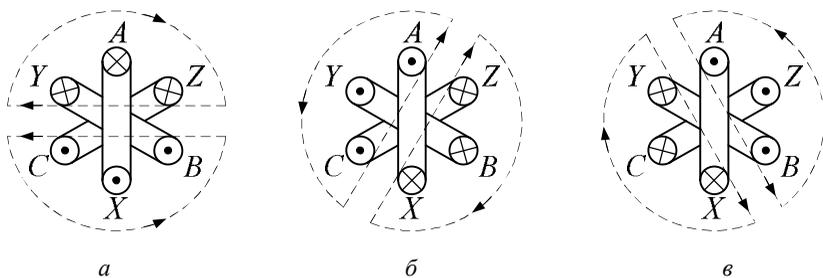


Рис. 15.3. Направления токов в катушках и картины магнитного поля для различных моментов времени

Для момента времени  $t = t_2$ ,  $i_B > 0$ ,  $i_A < 0$ ,  $i_C < 0$  направления токов в катушках и схематическая картина поля даны на рисунке 15.3, б. За время, равное  $T/3$ , магнитное поле повернулось в пространстве на  $1/3$  оборота.

Для момента времени  $t = t_3$ ,  $i_C > 0$ ,  $i_A < 0$ ,  $i_B < 0$  направления токов в катушках и схематическая картина поля даны на рисунке 15.3, *в*. Для момента времени  $t = t_4$ ,  $i_A > 0$ ,  $i_B < 0$ ,  $i_C < 0$  направления токов в катушках и схематическая картина поля будут такими же, как на рисунке 15.3, *а*.

Сопоставление схематических картин магнитного поля, приведенных для различных, следующих друг за другом моментов времени, наглядно показывает вращение магнитного поля. В течение одного периода переменного тока магнитное поле таких катушек совершает один полный оборот.

Направление вращения магнитного поля зависит исключительно от последовательности фаз токов в катушках. Если сохранить подключение катушки  $AХ$  к фазе  $A$  источника питания, катушку  $ВУ$  подключить к фазе  $C$ , а катушку  $CZ$  – к фазе  $B$ , то направление вращения поля изменится на противоположное.

### 15.3. Принцип действия асинхронного двигателя

Асинхронный двигатель (рис. 15.4, *а*) состоит из двух частей: неподвижной – статора и подвижной – ротора. В статоре расположена трехфазная обмотка, по которой проходит трехфазный ток, вследствие этого в статоре создается вращающееся магнитное поле. В роторе расположена короткозамкнутая обмотка типа беличьего колеса.

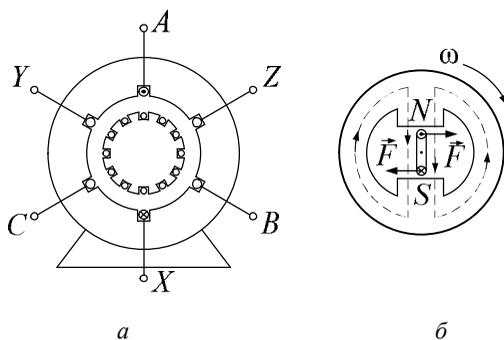


Рис. 15.4. Принцип устройства трехфазного асинхронного двигателя (*а*); макет вращающегося магнитного поля и короткозамкнутого витка обмотки ротора (*б*)

Поскольку вращающееся магнитное поле статора изменяется относительно неподвижной обмотки ротора, то по закону электромагнитной индукции в обмотке ротора наводится ЭДС. Поскольку обмотка ротора является короткозамкнутой, то по ней (от наведенной ЭДС) пойдет ток.

Заменяем вращающееся магнитное поле статора вращающимся постоянным магнитом. Между полюсами этого магнита поместим один короткозамкнутый (т. е. замкнутый на себя) виток обмотки ротора (рис. 15.4, б). Если магнитное поле вращается по часовой стрелке, относительно него виток вращается против часовой стрелки. Согласно правилу правой руки, в верхнем проводнике витка появится ток, направленный к нам, а в нижнем – от нас. Кроме того, имеем два проводника с токами, помещенные в магнитное поле. Согласно закону Ампера, на проводники будут действовать механические силы. По правилу левой руки на верхний проводник сила будет направлена вправо, на нижний – влево. При этом создается вращающий момент, и ротор начнет вращаться в направлении вращения поля с частотой на 2–5 % меньше, чем частота вращающего поля. Если допустить, что ротор догонит поле, то при одинаковых угловых скоростях магнитное поле относительно обмотки ротора неподвижно, следовательно, в обмотке ротора не наведется ЭДС, не будет тока и не будет вращающего момента.

Двигатель называется асинхронным потому, что его ротор вращается не синхронно с вращающим магнитным полем, создаваемым обмотками статора. Угловая частота вращения магнитного поля обмоток статора больше угловой частоты вращения ротора. Отношение разности этих частот к частоте магнитного поля обмоток статора называют скольжением  $s$ :

$$s = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1},$$

где  $\omega_1$  – угловая частота вращения магнитного поля, создаваемого обмотками статора;

$\omega_2$  – угловая частота вращения ротора электродвигателя.



### **Вопросы и задачи для самоконтроля**

1. Расскажите, как образуется пульсирующее магнитное поле.
2. Охарактеризуйте условия получения вращающегося магнитного поля.
3. Объясните принцип действия асинхронного двигателя.
4. Поясните название электрического двигателя «асинхронный», «с короткозамкнутым ротором».
5. Определите скольжение двигателя, если угловая частота вращения магнитного поля обмоток статора равна 3000 об/мин, а угловая частота вращения ротора – 2850 об/мин. Ответ: 5 %.

## **16. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫМИ ЭДС, НАПРЯЖЕНИЯМИ И ТОКАМИ**

---

### **16.1. Причины возникновения несинусоидальности ЭДС, напряжений и токов**

При генерировании, трансформации, распределении и потреблении электрической энергии могут возникать искажения формы синусоидальных ЭДС, напряжений и токов. В машинных генераторах переменного тока кривая распределения магнитной индукции вдоль зазора несколько отличается от синусоиды. По мере износа подшипников генератора зазор между статором и ротором изменяется, что вызывает искажение кривых наводимых ЭДС в обмотках генератора. Они становятся несинусоидальными.

Несинусоидальные токи в цепях возникают и при синусоидальных ЭДС и напряжениях источников электрической энергии, если цепи содержат нелинейные элементы. Так, в катушке с ферромагнитным магнитопроводом, которая является нелинейным элементом, при синусоидальном напряжении сети ток несинусоидальный. Подобное явление наблюдается в электрических сетях, например, когда в качестве осветительных приборов используются люминесцентные лампы низкого или высокого давления, а также выпрямители, сварочные аппараты и другие установки, имеющие нелинейные вольт-амперные характеристики. Нелинейные элементы широко используются в электрических цепях автоматики, управления, релейной защиты и т. д. Эти нелинейные элементы (стабилизаторы напряжения, умножители и делители частоты, магнитные усилители и т. п.) приводят к искажению формы кривых напряжения или тока.

Появление в электрических цепях несинусоидальных напряжений и токов приводит к весьма нежелательным последствиям. Несинусоидальные токи вызывают дополнительные потери мощно-

---

---

сти, ускоряют износ электрооборудования, ухудшают характеристики двигателей, создают большие помехи в линиях связи, каналах телемеханики и т. д.

## 16.2. Разложение периодической несинусоидальной кривой в тригонометрический ряд Фурье

Как известно, любая периодическая функция  $f(\omega t)$ , удовлетворяющая условиям Дирихле, т. е. имеющая на каждом конечном интервале конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов, может быть разложена в тригонометрический ряд Фурье. Периодические несинусоидальные ЭДС, напряжения и токи в реальных электрических цепях удовлетворяют условиям Дирихле. Поэтому, например, для периодической несинусоидальной ЭДС можно записать

$$e(t) = E_0 + E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + E_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + E_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots \\ \dots + E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) + \dots = E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k). \quad (16.1)$$

Первый член ряда  $E_0$  называется постоянной составляющей ЭДС или нулевой гармоникой, второй член  $E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$  – основной синусоидой или первой гармоникой, а все остальные члены ряда вида  $E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$  при  $k > 1$  носят название высших гармоник.

В выражении (16.1)  $k$  – номер гармоники. Он показывает, во сколько раз частота  $k$ -гармоники больше основной частоты. Основная угловая частота  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  – период несинусоидальной периодической ЭДС.

В общем случае ряд Фурье содержит бесконечное число членов, но, как правило, можно ограничиться некоторым конечным числом членов ряда. Для вычисления коэффициентов ряда Фурье целесообразно его члены представить через синусоиды и косинусоиды без начальных фаз. Тогда для любой  $k$ -й гармоники имеем

$$\begin{aligned} E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) &= E_{km} \cos \psi_k \sin k\omega t + E_{km} \sin \psi_k \cos k\omega t = \\ &= B_{km} \sin k\omega t + C_{km} \cos k\omega t. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$e(t) = E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_{km} \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_{km} \cos k\omega t. \quad (16.2)$$

Постоянная составляющая  $E_0$  и коэффициенты  $B_{km}$  и  $C_{km}$ , как известно из курса математики, определяются при помощи следующих формул:

$$E_0 = \frac{1}{T} \int_0^T e(t) dt; \quad B_{km} = \frac{2}{T} \int_0^T e(t) \sin k\omega t dt; \quad C_{km} = \frac{2}{T} \int_0^T e(t) \cos k\omega t dt. \quad (16.3)$$

Имея  $B_{km}$  и  $C_{km}$ , нетрудно вычислить амплитуду и начальную фазу  $k$ -гармоники:

$$E_{km} = \sqrt{B_{km}^2 + C_{km}^2}; \quad \psi_k = \operatorname{arctg} \frac{C_{km}}{B_{km}}. \quad (16.4)$$

Аналогично можно разложить в ряд Фурье несинусоидальные токи и напряжения. Разложение в ряд Фурье встречающихся в электротехнике периодических кривых геометрически правильной формы приведено в справочных таблицах. Если справочные данные отсутствуют или требуются аналитические решения, можно воспользоваться выражениями (16.1)–(16.4). Однако на практике часто бывает достаточно получить численные значения коэффициентов ряда. Это позволяют сделать современные компьютерные средства обработки данных по значениям функции, заданной табличным способом, т. е. рядом абсцисс и ординат точек.

При проверке полученных результатов разложения в ряд, а также для предварительного исключения из расчетов и анализа коэффициентов, отсутствующих в разложении, полезно отметить некоторые связи между характером периодической функции и ее частотным спектром. То есть в зависимости от угловой частоты некоторые гармоники могут быть равными нулю или отсутствовать.

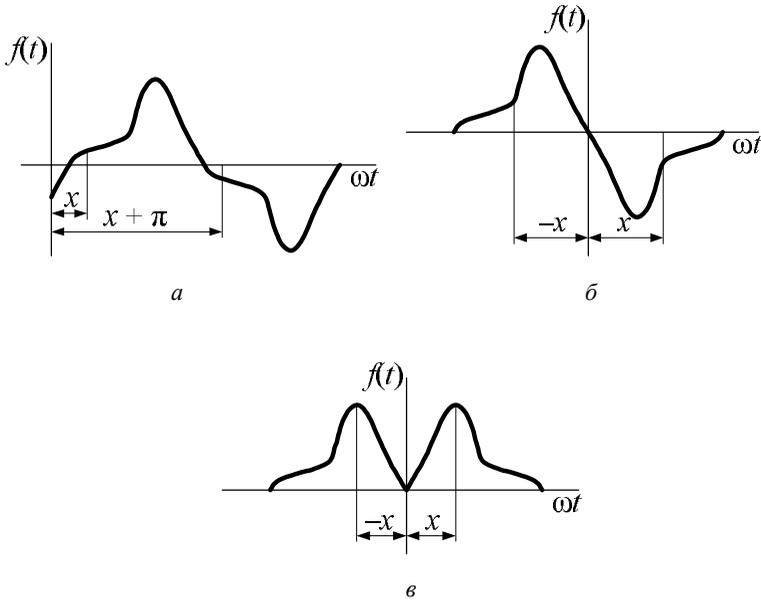


Рис. 16.1. Виды кривых периодических функций

Так, для кривых (рис. 16.1, а), симметричных относительно оси абсцисс, в спектре ряда Фурье будут отсутствовать нулевая и все четные гармоники. Значительное число функций, с которыми приходится иметь дело в электротехнике, являются симметричными относительно оси абсцисс. Следовательно, они не содержат четных гармоник и постоянной составляющей.

Кривые (рис. 16.1, б), симметричные относительно начала координат, не содержат постоянной составляющей, и все косинусные составляющие у этих функций равны нулю.

Если аналогичные выкладки проделать для приведенной на рисунке 16.1, в кривой, симметричной относительно оси ординат, то в ее разложении в ряд Фурье будут отсутствовать все синусные составляющие.

### 16.3. Расчет мгновенных значений напряжений и токов в электрических цепях при действии периодических несинусоидальных ЭДС

Если в линейной цепи действует один или несколько источников несинусоидальных периодических ЭДС, то расчет токов цепи разделяется на три этапа.

1. Разложение ЭДС источников в тригонометрический ряд, т. е. на постоянную и синусоидальные составляющие. Это означает, что источник несинусоидальной ЭДС можно рассматривать как последовательное соединение источника постоянной ЭДС и источников синусоидальных ЭДС с различными частотами. Так, если ЭДС (рис. 16.2, а)

$$e = E_0 + E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + E_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2),$$

то действие источника такой ЭДС аналогично действию трех последовательно соединенных источников ЭДС (рис. 16.2, б):

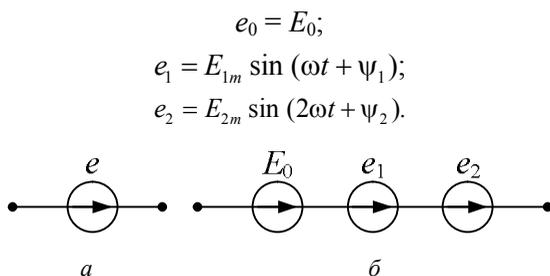


Рис. 16.2. Замена источника несинусоидальной ЭДС последовательным соединением источников постоянной и синусоидальной ЭДС

2. Расчет мгновенных значений токов, возникающих в ветвях электрической цепи под действием каждой из составляющих несинусоидальной ЭДС в отдельности.

3. Нахождение мгновенных значений токов в ветвях в соответствии с принципом наложения в виде суммы мгновенных значений составляющих токов.

---

---

Если, например, в какой-либо ветви токи, создаваемые ЭДС  $E_0$ ,  $e_1$  и  $e_2$ , соответственно равны  $I_0$ ,  $i_1$  и  $i_2$ , то общий ток ветви

$$i = I_0 + i_1 + i_2.$$

Таким образом, расчет линейной цепи с несинусоидальными ЭДС сводится к решению  $n$  задач с синусоидальными ЭДС, где  $n$  – число синусоидальных составляющих ЭДС различных частот, и одной задачи с постоянными ЭДС.

При решении каждой из этих задач необходимо учитывать, что для различных частот индуктивные и емкостные сопротивления неодинаковы. Индуктивное сопротивление для  $k$ -гармоники в  $k$  раз больше, а емкостное, наоборот, в  $k$  раз меньше, чем для первой:

$$X_{L_k} = k\omega L = kX_{L_1};$$

$$X_{C_k} = \frac{1}{k\omega C} = \frac{X_{C_1}}{k}.$$

Для постоянной составляющей  $E_0$  индуктивное сопротивление равно нулю, а емкостное – бесконечности. Активное сопротивление также зависит от частоты – увеличивается с ростом последней вследствие поверхностного эффекта. Если расчет ведется для гармоник невысоких частот и относительно малых сечений проводов, можно не учитывать изменения сопротивления  $R$  с частотой и считать, что при всех частотах активное сопротивление равно сопротивлению при постоянном токе.

Поскольку каждая составляющая тока является либо постоянной величиной, либо синусоидальной функцией времени, то для расчета каждой из них в отдельности могут быть применены все методы, рассмотренные для расчета цепей постоянного и синусоидального токов. Для расчета каждой синусоидальной составляющей в отдельности целесообразно использовать комплексный метод. Закон Ома в комплексной форме для  $k$ -гармоники имеет вид

$$\dot{I}_k = \frac{\dot{U}_k}{R + j\left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)}.$$

Суммировать полученные комплексы токов для отдельных гармоник нельзя, так как они имеют разные частоты. Суммировать можно лишь мгновенные значения, выраженные как функции времени.

Пользуясь мгновенными значениями, определим ток  $i$  в простейшей неразветвленной цепи с постоянными параметрами  $R, L, C$  (рис. 16.3) при установившемся режиме в случае, когда напряжение  $u$  на зажимах цепи является периодической несинусоидальной функцией времени. Представим напряжение в виде ряда:

$$u = U_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots,$$

где  $U_0$  – постоянная составляющая, а  $u_k = U_{km} \sin(k\omega t + \psi_{uk})$  –  $k$ -гармоника.

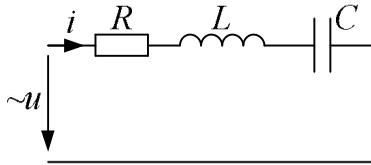


Рис. 16.3. Электрическая цепь при действии периодического несинусоидального напряжения

Постоянная составляющая тока в этой цепи равна нулю, т. е.  $I_0 = 0$ , так как конденсатор постоянного тока не проводит.

Синусоидальные составляющие тока, возникающие в цепи под действием каждой синусоидальной составляющей напряжения разных частот, найдем, используя закон Ома в комплексной форме. Рассчитаем комплексную амплитуду тока  $k$ -гармоники:

$$\dot{I}_{km} = \frac{\dot{U}_{km}}{\underline{Z}_k} = \frac{\dot{U}_{km}}{R + j\left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)}.$$

Записываем  $\dot{U}_{km} = U_{km} e^{j\psi_{uk}}$  и  $\underline{Z}_k = Z_k e^{j\phi_k}$ , причем

$$Z_k = \sqrt{R^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2};$$

$$\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{k\omega L - \frac{1}{k\omega C}}{R},$$

и получим

$$\dot{i}_{km} = \frac{U_{km} e^{j\psi_{uk}}}{Z_k e^{j\varphi_k}} = I_{km} e^{j(\psi_{uk} - \varphi_k)}.$$

Мгновенное значение тока  $k$ -гармоники имеет вид

$$i_k = I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{uk} - \varphi_k) = I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ik}).$$

Искомый ток определяется суммой:

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots$$

Для наглядного представления о форме кривой несинусоидального тока необходимо рисовать графики отдельных гармоник и результирующей кривой, полученной суммированием ординат составляющих токов. При вычерчивании кривых отдельных гармоник всегда следует иметь в виду, что период гармоники обратно пропорционален ее номеру. Следовательно, если по оси абсцисс отложено  $\omega t$ , то, соблюдая один и тот же масштаб, вместо углов

$\psi_k$  надо откладывать углы  $\frac{\Psi_k}{k}$ . В качестве примера построим график несинусоидального тока, состоящего из двух гармоник (рис. 16.4):

$$i = 12 \sin(\omega t + 120^\circ) + 4 \sin(2\omega t + 90^\circ) \text{ А.}$$

При построении графика тока второй гармоники  $i_2$  учтено, что период этой гармоники в 2 раза меньше периода тока первой гармоники  $i_1$  и начальная фаза второй гармоники ( $90^\circ$ ) разделена на номер гармоники  $\left(\frac{90^\circ}{2} = 45^\circ\right)$ .

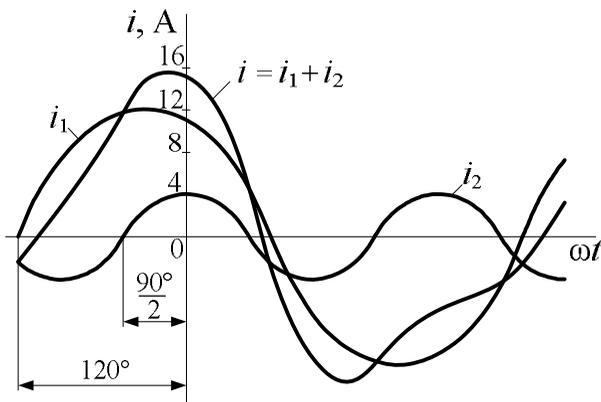


Рис. 16.4. Построение графиков несинусоидального тока

### 16.4. Действующие значения периодических несинусоидальных токов, напряжений и ЭДС

О значениях периодических несинусоидальных токов, напряжений и ЭДС судят по их действующим значениям. Действующее значение периодического несинусоидального тока есть среднее квадратичное значение этого тока за период  $T$ :

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}.$$

Раскладывая  $i(t)$  в ряд Фурье, имеем

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T (i_0 + i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots)^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_k^2 dt + \sum_{\substack{q=0 \\ s=0}}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_q i_s dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_k^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2 = I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots, \end{aligned}$$

так как при  $q \neq s$

$$\int_0^T i_q i_s dt = \int_0^T I_{mq} I_{ms} \sin(q\omega t + \psi_q) \sin(s\omega t + \psi_s) dt =$$

$$= \frac{1}{2} I_{mq} I_{ms} \int_0^T \left\{ \cos [\omega t(q-s) + \psi_q - \psi_s] - \cos [\omega t(q+s) + \psi_q + \psi_s] \right\} dt = 0.$$

Действительно, при  $q \neq s$  мы получаем интегралы от косинусоидальных функций времени за целое число  $(q-s)$  и  $(q+s)$  периодов. Такие интегралы равны нулю.

Итак, имеем

$$I = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots},$$

т. е. действующее значение периодического несинусоидального тока равно корню квадратному из суммы квадратов постоянной составляющей и действующих значений всех гармоник.

Аналогично находим действующие значения несинусоидальных напряжений и ЭДС:

$$U = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} \quad \text{и} \quad E = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} E_k^2}.$$

**Пример 16.1.** Определить действующее значение несинусоидального напряжения, заданного следующим выражением:

$$u(t) = 100 + 80 \sin(\omega t + 30^\circ) + 60 \sin(3\omega t + 20^\circ) + 50 \sin(5\omega t + 45^\circ).$$

**Решение.** Анализ заданного в виде тригонометрического ряда напряжения показывает, что это выражение содержит нулевую, первую, третью и пятую гармоники. Тогда действующее значение несинусоидального напряжения

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_3^2 + U_5^2} = \sqrt{100^2 + \left(\frac{80}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{60}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{50}{\sqrt{2}}\right)^2} = 127 \text{ В.}$$

## 16.5. Коэффициенты, характеризующие форму кривых токов и напряжений

Для оценки несинусоидальных периодических кривых токов и напряжений в электротехнике наиболее распространены следующие три коэффициента.

1. Коэффициент формы  $K_\phi$  определяется как отношение действующего значения к среднему по модулю значению:

$$\hat{E}_\phi = \frac{I}{I_{\text{нб}}}.$$

Для синусоидального тока  $K_\phi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$ .

2. Коэффициент амплитуды  $K_a$  равен отношению максимального значения к действующему значению:

$$K_a = \frac{I_{\text{max}}}{I}.$$

Для синусоиды  $K_a = \sqrt{2} \approx 1,41$ .

3. Коэффициент искажения синусоидальности кривой междуфазного (фазного) напряжения  $K_U$ . Он определяется как отношение действующего значения несинусоидального напряжения  $n$ -й гармоники к действующему напряжению основной гармоники:

$$K_{U(n)} = \frac{U_{(n)}}{U_{(1)}} \cdot 100 \text{ \%}.$$

Для несинусоидального напряжения  $K_U < 1$  (в относительных единицах).

Кривые напряжения промышленных сетей обычно отличаются от идеальной синусоиды. В электроэнергетике вводят понятие о практически синусоидальной кривой. Согласно межгосударственному стандарту ГОСТ 13109-97, напряжение в системах электропитания общего назначения считается практически синусоидальным, если коэффициент искажения напряжения с учетом высших гармоник от нулевой до 40-й не превышает допустимых величин, значение которых приводится в стандарте.

Электроизмерительные приборы различных систем реагируют на различные значения измеряемой величины. Приборы электродинамической, электромагнитной и тепловой систем реагируют на действующее значение измеряемой величины. Магнитоэлектрические приборы измеряют постоянную составляющую, а с выпрями-

телями – среднее по модулю значение. Амплитудные электродные вольтметры реагируют на максимальные значения.

### 16.6. Мощность в цепи несинусоидального тока

Активная мощность периодического тока произвольной формы определяется как средняя мощность за период  $P$ :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt.$$

Если мгновенные значения напряжения и тока выразить в виде тригонометрических рядов, то получим

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \sum_{k=0}^{\infty} U_{m_k} \sin(k\omega t + \psi_{u_k}) \right] \left[ \sum_{k=0}^{\infty} I_{m_k} \sin(k\omega t + \psi_{i_k}) \right] dt.$$

Так как среднее за период произведение мгновенных значений синусоид различной частоты равно нулю (см. п. 16.4) и тригонометрические ряды абсолютно сходятся при любых частотах  $\omega$ , то

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} U_{m_k} I_{m_k} \sin(k\omega t + \psi_{u_k}) \sin(k\omega t + \psi_{i_k}) \, dt,$$

или после интегрирования

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{m_k} I_{m_k} \cos \varphi_k}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k, \quad (16.5)$$

где  $\varphi_k = \psi_{u_k} - \psi_{i_k}$ .

Из выражения (16.5) следует вывод: активная мощность несинусоидального тока равна сумме активных мощностей отдельных гармоник (постоянная составляющая рассматривается как нулевая гармоника с  $\varphi_0 = 0$ ):

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} P_k.$$

Активная мощность  $P$  представляет собой энергию электрической цепи, необратимо преобразуемую в другие виды энергии, в основном

тепловую и механическую. Поэтому активную мощность несинусоидального тока можно рассчитать по закону Джоуля – Ленца:

$$P = RI^2.$$

Кроме понятия активной мощности  $P$ , по аналогии с синусоидальными токами вводится понятие полной мощности  $S$ , определяемой как произведение действующих значений тока и напряжения:

$$S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}.$$

Активная мощность меньше полной, исключение составляет только мощность в цепи, сопротивление которой чисто активное, т. е.  $U_k = RI_k$  и, следовательно,  $S = P$ .

Отношение активной мощности к полной называют *коэффициентом мощности* и иногда приравнивают к косинусу некоторого условного угла  $\theta$ :

$$\cos \theta = \frac{P}{S}.$$

Формально можно ввести понятие реактивной мощности, определяемой как сумма реактивных мощностей отдельных гармоник:

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k.$$

Для несинусоидальных токов, в отличие от синусоидальных, квадрат полной мощности обычно больше суммы квадратов активной и реактивной мощностей:

$$S^2 \geq P^2 + Q^2.$$

### 16.7. Электрические фильтры

Сопротивление электрической цепи, содержащей индуктивные катушки и конденсаторы, зависит от частоты, и, следовательно, оно оказывается различным для разных гармоник. Поэтому если к зажимам такой цепи приложено периодическое несинусоидальное напряжение, то кривая тока в цепи отличается по форме от кривой напряжения.

---

Кривая тока  $i$  подобна кривой напряжения только тогда, когда цепь обладает одним активным сопротивлением  $R$ , одинаковым для всех частот. В таком случае для всех гармоник  $I_{m_k} = \frac{U_{m_k}}{R}$  и, следовательно,  $\frac{I_{m_k}}{I_{m_1}} = \frac{U_{m_k}}{U_{m_1}}$ , т. е. кривые тока и напряжения подобны друг другу.

Рассмотрим отдельно катушку с индуктивностью  $L$  и  $R = 0$ . Ее сопротивление при частоте  $k\omega$  равно  $Z_k = k\omega L$ , т. е. растет с возрастанием порядка гармоники. Следовательно,

$$I_{m_k} = \frac{U_{m_k}}{k\omega L} \text{ и } \frac{I_{m_k}}{I_{m_1}} = \frac{1}{k} \frac{U_{m_k}}{U_{m_1}}.$$

Таким образом, амплитуды высших гармоник, выраженные в долях первой гармоники, в кривой тока меньше, чем в кривой напряжения. Говорят, что катушка сглаживает кривую тока. Даже при резко несинусоидальной кривой напряжения форма кривой тока катушки нередко приближается к синусоиде.

Рассмотрим конденсатор без потерь. Его сопротивление  $Z_k = \frac{1}{k\omega C}$  убывает с ростом порядка гармоники. Имеем  $I_{m_k} = k\omega C U_{m_k}$  и  $\frac{I_{m_k}}{I_{m_1}} = k \frac{U_{m_k}}{U_{m_1}}$ , т. е. в конденсаторе содержание выс-

ших гармоник, выраженных в долях первой гармоники, в кривой тока больше, чем в кривой напряжения. Следовательно, высшая гармоника напряжения, даже если ее амплитуда составляет незначительную долю амплитуды основной гармоники, может вызвать ток в конденсаторе, соизмеримый с током основной гармоники и даже его превышающий. Поэтому и при напряжении, близком к синусоидальному, ток в конденсаторе может быть резко несинусоидален из-за высших гармоник. Говорят, что конденсатор искажает кривую тока по сравнению с кривой напряжения.

Для сложной цепи, содержащей участки с активным сопротивлением, катушки и конденсаторы, на форму кривой тока будет влиять конфигурация цепи. Рассмотрим простейшую электрическую цепь, питающую приемник, с последовательным соединением катушки  $L$  и конденсатора  $C$  (рис. 16.5, *a*).

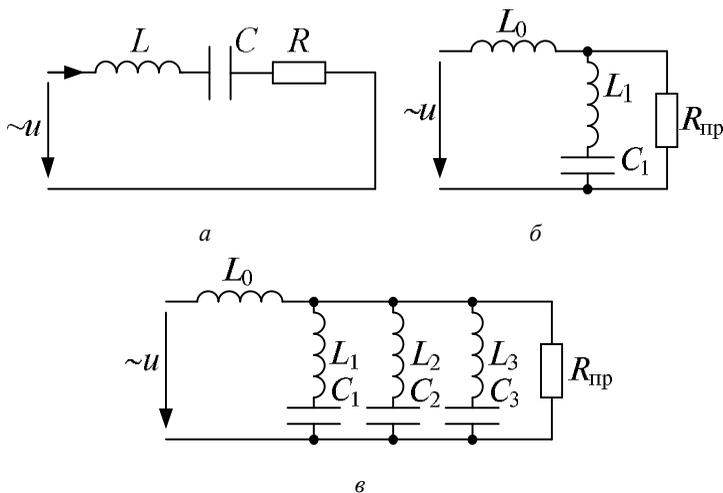


Рис. 16.5. Схема электрических фильтров с последовательным соединением катушки  $L$  и конденсатора  $C$

Если для гармоники порядка  $k = q$  имеет место резонанс напряжений, то  $q\omega L_1 = \frac{1}{q\omega C_1}$  и сопротивление цепи для этой гармоники минимально и соответственно эта гармоника в кривой тока будет выделяться.

Если ветвь из последовательно соединенных катушки  $L_1$  и конденсатора  $C_1$ , настроенную в резонанс при частоте  $q\omega$ , включить параллельно приемнику, причем до этой ветви еще включить индуктивную катушку  $L_0$  (рис. 16.5, *б*), то гармоника тока порядка  $q$  не пройдет в приемник, так как для этой частоты приемник будет зашунтирован ветвью  $L_1, C_1$ , имеющей при резонансе весьма малое

активное сопротивление. Остальные гармоники тока, встречая значительное сопротивление ветви  $L_1, C_1$ , проходят в приемник. Если напряжение  $u$  содержит постоянную составляющую, то вызываемая ею постоянная составляющая тока пройдет целиком в приемник, так как сопротивление ветви  $L_1, C_1$  для нее бесконечно, а индуктивное сопротивление катушки  $L_0$  равно нулю. Такой метод широко используется на выпрямительных подстанциях, питающих контактную сеть электрических железных дорог. Напряжение после выпрямителя, кроме постоянной составляющей, содержит также ряд гармоник. После выпрямителя и катушки  $L_0$  включают ветвь  $L, C$  по схеме, изображенной на рисунке 16.5 в, настраивая эти ветви в резонанс на частоты гармоник, которые не хотят допустить в контактную сеть.

Чтобы затруднить прохождение гармоники тока порядка  $q$  от источника несинусоидального напряжения  $u$  к приемнику, на пути между ними включают контур из параллельно соединенных катушки и конденсатора (рис. 16.6).

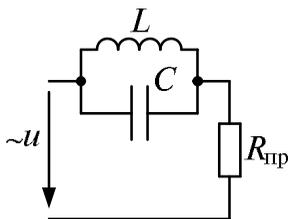


Рис. 16.6. Схема электрического фильтра с параллельным соединением катушки  $L$  и конденсатора  $C$

Величины  $L$  и  $C$  подбирают так, чтобы соблюдалось условие резонанса токов  $q\omega C = \frac{1}{q\omega L}$ . Сопротивление цепи для этой гармоники тока максимально и соответственно эта гармоника в кривой тока будет ослаблена.

Электрические цепи, предназначенные для преимущественного пропуска или задержания токов определенных частот, носят назва-

ние *электрических фильтров*. Здесь были приведены примеры простейших фильтров, пропускающих или задерживающих токи определенных дискретных частот. В дальнейшем будут рассмотрены фильтры, пропускающие или задерживающие токи в определенном диапазоне частот.

### 16.8. Высшие гармоники в трехфазных системах

Предположим, фазные ЭДС трехфазного генератора несинусоидальны, т. е. содержат высшие гармоники. Кривые ЭДС во всех фазах по форме одинаковы и сдвинуты в каждой последующей фазе относительно предыдущей по времени на одну треть периода ( $T/3$ ).

Допустим,  $k$ -гармоника ЭДС фазы  $A$  представлена следующим выражением:

$$e_{kA} = E_{m_k} \sin(k\omega t + \psi_k).$$

Так как ЭДС фазы  $B$  отстает от ЭДС фазы  $A$  на время  $T/3$ , а ЭДС фазы  $C$  опережает ЭДС фазы  $A$  на время  $T/3$ , то  $k$ -гармоники в фазе  $B$  и в фазе  $C$  равны соответственно:

$$e_{kB} = E_{m_k} \sin \left[ k\omega \left( t - \frac{T}{3} \right) + \psi_k \right] = E_{m_k} \sin(k\omega t - 120k + \psi_k);$$

$$e_{kC} = E_{m_k} \sin \left[ k\omega \left( t + \frac{T}{3} \right) + \psi_k \right] = E_{m_k} \sin(k\omega t + 120k + \psi_k);$$

$$k\omega \frac{T}{3} = k \frac{2\pi}{T} \frac{T}{3} = k \frac{2\pi}{T} = 120^\circ k$$

(в данном случае  $\pi = 180^\circ$ ).

Если  $k = 1, 4, 7, 10$  и т. д., то  $k$ -гармоника ЭДС фазы  $B$  отстает по фазе на  $120^\circ$  от  $k$ -гармоники ЭДС фазы  $A$ . Следовательно, 1, 4, 7, 10 и т. д. гармоники образуют системы прямой последовательности фаз.

Если  $k = 2, 5, 8, 11$  и т. д., то  $k$ -гармоника ЭДС фазы  $B$  опережает по фазе  $k$ -гармонику ЭДС фазы  $A$  на  $120^\circ$ . Следовательно, 2, 5, 8,

---

---

11 и т. д. гармоники образуют системы обратной последовательности фаз.

Если  $k$  кратно трем, т. е.  $k=3, 6, 9, 12$  и т. д., то ЭДС  $k$ -гармоники во всех фазах имеют одно значение и направление. Следовательно, 3, 6, 9, 12 и т. д. гармоники образуют системы нулевой последовательности фаз.

В ЭДС трехфазного генератора отсутствует постоянная составляющая ( $k=0$ ) и все четные гармоники, поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением только нечетных гармоник.

На практике чаще всего при генерировании напряжения отсутствуют как постоянная составляющая, так и все четные гармоники, поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением только нечетных гармоник. Тогда ближайшей гармоникой, образующей обратную последовательность, является пятая. В электродвигателях она наносит наибольший вред, поэтому именно ее стремятся исключить.

Рассмотрим особенности работы трехфазных систем, которые вызваны наличием гармоник, кратных трем.

1. При соединении обмоток генератора или трансформатора треугольником (рис. 16.7) по ветвям последнего протекают токи гармоник, кратных трем, даже при отсутствии внешней нагрузки. Действительно, алгебраическая сумма ЭДС гармоник, кратных трем ( $E_3, E_6$  и т. д.), в треугольнике имеет утроенное значение, в отличие от остальных гармоник, для которых эта сумма равна нулю.

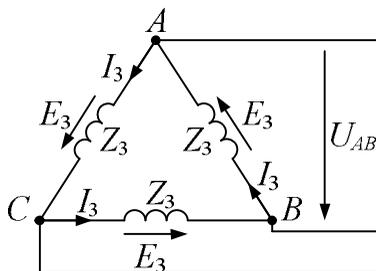


Рис. 16.7. Схема трехфазной цепи при наличии гармоник, кратных трем

Если фазное сопротивление обмотки для третьей гармоники  $Z_3$ , то ток третьей гармоники в контуре треугольника будет  $I_3 = E_3/Z_3$ . Аналогично ток шестой гармоники  $I_6 = E_6/Z_6$  и т. д. Действующее значение тока, протекающего по обмоткам, будет

$$I = \sqrt{I_3^2 + I_6^2 + I_9^2 + \dots}$$

Поскольку сопротивления обмоток генератора малы, ток может достигать больших величин. Поэтому при наличии в фазных ЭДС гармоник, кратных трем, обмотки генератора или трансформатора треугольником не соединяют.

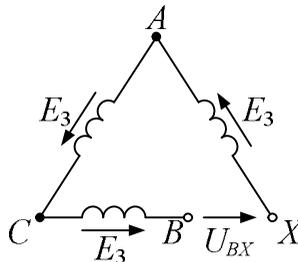
2. Если соединить обмотки генератора или трансформатора открытым треугольником (рис. 16.8), на его зажимах будет действовать напряжение, равное сумме ЭДС гармоник, кратных трем, т. е.

$$u_{BX} = 3E_{m_3} \sin(3\omega t + \psi_3) + 3E_{m_6} \sin(6\omega t + \psi_6) + E_{m_9} \sin(9\omega t + \psi_9) + \dots$$

Его действующее значение

$$U_{BX} = 3\sqrt{E_3^2 + E_6^2 + E_9^2 + \dots}$$

Открытый треугольник обычно применяют перед соединением обмоток генератора обычным треугольником для проверки возможности безаварийной реализации последнего.



3. Линейные напряжения, независимо от схемы соединения обмоток генератора или трансформатора, гармоник, кратных трем, не содержат. При соединении треугольником фазные ЭДС, содержащие гармоники, кратные трем, компенсируются падением напряжения на внутреннем сопротивлении фазы генератора. Действительно, по второму закону Кирхгофа для третьей, например, гармоники для схемы, приведенной на рисунке 16.7, можно записать  $U_{AB3} + I_3 Z_3 = E_3$ , откуда получаем  $U_{AB3} = 0$ . Аналогично для любой из гармоник, кратных трем.

При соединении звездой линейные напряжения равны разности соответствующих фазных ЭДС. Для гармоник, кратных трем, при составлении этих разностей фазные ЭДС уничтожаются, поскольку они образуют систему нулевой последовательности.

Таким образом, в фазных напряжениях могут присутствовать составляющие всех гармоник и их действующее значение:

$$U_{\phi} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + \dots}$$

В линейных же напряжениях гармоники, кратные трем, отсутствуют, поэтому их действующее значение

$$U_{\pi} = \sqrt{3} \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_4^2 + U_5^2 + U_7^2 + \dots}$$

В связи с этим при наличии гармоник, кратных трем,  $\frac{U_{\pi}}{U_{\phi}} < \sqrt{3}$ .

4. В схемах без нулевого провода токи гармоник, кратных трем, замыкаться не могут, поскольку они образуют систему нулевой последовательности и могут замыкаться только при наличии последнего. При этом между нулевыми точками приемника и источника даже в случае симметричной нагрузки появляется напряжение, равное сумме ЭДС гармоник, кратных трем, в чем легко убедиться по уравнению второго закона Кирхгофа с учетом того, что токи указанных гармоник отсутствуют. Мгновенное значение этого напряжения

$$u_{N_1 N} = E_{m_3} \sin(3\omega t + \psi_3) + E_{m_6} \sin(6\omega t + \psi_6) + E_{m_9} \sin(9\omega t + \psi_9) + \dots$$

Его действующее значение  $U_{N_1 N} = \sqrt{E_3^2 + E_6^2 + E_9^2 + \dots}$ .

5. В схеме звезда–звезда с нулевым проводом (рис. 16.9) по последнему будут замыкаться токи гармоник, кратных трем, даже в случае симметричной нагрузки, если фазные ЭДС содержат указанные гармоники. Учитывая, что гармоники, кратные трем, образуют систему нулевой последовательности, можно записать

$$I_3 = \frac{E_3}{Z_3 + 3Z_{N_3}}; \quad I_6 = \frac{E_6}{Z_6 + 3Z_{N_6}}; \quad I_9 = \frac{E_9}{Z_9 + 3Z_{N_9}}.$$

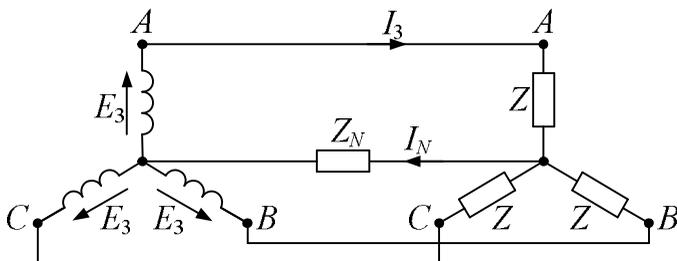


Рис. 16.9. Схема звезда–звезда с нулевым проводом

Ток нулевого провода для гармоник, кратных трем, в 3 раза больше тока каждой фазы, поэтому его действующее значение будет

$$I_N = 3\sqrt{I_3^2 + I_6^2 + I_9^2 + \dots}$$



### Вопросы и задачи для самоконтроля

1. Перечислите причины несинусоидальности напряжения, тока.
2. Разложите в общем виде несинусоидальный периодический ток на первую, третью и пятую гармоники.
3. Изложите методику определения токов в цепи с несинусоидальными ЭДС.
4. Запишите формулы для определения действующего значения несинусоидального тока, напряжения, ЭДС.
5. Объясните, как влияют реактивные элементы цепи на форму кривых токов при несинусоидальном напряжении.

---

---

6. Индуктивное сопротивление катушки по первой гармонике равно 10 Ом. Чему равно ее сопротивление третьей гармонике тока? Ответ: 30 Ом.

7. Емкостное сопротивление конденсатора по пятой гармонике тока равно 20 Ом. Чему равно это сопротивление для первой гармоники? Ответ: 100 Ом.

8. Запишите закон Ома для периодического несинусоидального напряжения.

9. Запишите формулу для определения активной и полной мощностей при несинусоидальном периодическом токе.

10. Назовите, какие цепи называются электрическими фильтрами.

11. Перечислите гармоники, которые образуют прямую и обратную последовательности чередования фаз в трехфазной цепи.

12. Назовите особенности работы трехфазных цепей при наличии гармоник, кратных трем.

13. Поясните, почему линейные напряжения трехфазной цепи не содержат третью, шестую, девятую и другие, кратные трем, гармоники.

14. Объясните, какие гармоники тока отсутствуют при несинусоидальном напряжении при соединении трехфазной цепи звездой без нулевого провода.

## 17. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

---

### 17.1. Общие сведения о нелинейных элементах и цепях

Нелинейные электрические цепи являются одной из разновидностей электрических цепей. Под нелинейными электрическими цепями понимают электрические цепи, содержащие хотя бы один нелинейный элемент. Нелинейный элемент – это элемент, вольт-амперная характеристика которого нелинейная. Зависимость тока, проходящего через нелинейный элемент, от напряжения на этом элементе принято называть *вольт-амперной характеристикой* (ВАХ). У нелинейного элемента (это может быть резистор, катушка индуктивности, конденсатор) его параметры (соответственно сопротивление, индуктивность, емкость) изменяются в зависимости от величины приложенного напряжения или протекающего по нему тока. Соответственно это нелинейные вольт-амперные, вебер-амперные и кулон-вольтные характеристики.

Нелинейные элементы, в отличие от линейных, не могут быть описаны при помощи линейных уравнений (постоянных коэффициентов). Их характеризуют нелинейные уравнения, коэффициенты которых являются нелинейными функциями одной или нескольких переменных. Электрическое сопротивление линейного элемента является постоянной величиной, поэтому связь между током и напряжением на нем выражается линейным уравнением, и ВАХ линейного элемента есть прямая линия. Электрическое сопротивление нелинейного элемента зависит от значений или от направлений токов и напряжений на нем, и поэтому ВАХ нелинейного элемента выглядит в виде кривой.

Цепи, содержащие нелинейные элементы (нелинейные цепи), обладают рядом свойств, которые отсутствуют у линейных цепей. Эти свойства позволяют создать основанные на них автоматические системы управления и регулирования, устройства для преобразования электромагнитной энергии, передачи информации, вы-

числительные машины и др. На нелинейных эффектах основаны выпрямление, инвертирование и стабилизация напряжения, умножение и деление частоты, усиление мощности, получение модулированных колебаний различной формы, релейный эффект, запоминание сигналов и другие явления.

Электрические нелинейные цепи разделяют на цепи постоянного и переменного тока. При подключении цепи с любым нелинейным элементом к синусоидальному напряжению ток будет изменяться по периодическому, но несинусоидальному закону.

## 17.2. Нелинейные электрические цепи постоянного тока. Вольт-амперные характеристики нелинейных резисторов

В цепях постоянного тока в установившихся режимах индуктивные элементы не оказывают сопротивления, а емкостные элементы представляют собой сопротивление, равное бесконечности, и не пропускают постоянный ток. Поэтому в нелинейных электрических цепях постоянного тока рассматривают только резистивные элементы, которые описывают нелинейными вольт-амперными характеристиками. Нелинейность ВАХ различных резистивных элементов могут определять такие факторы, как температура, напряжение, ток и другие, а также скорость их изменения. Примеры ВАХ некоторых нелинейных резистивных элементов приведены на рисунке 17.1.

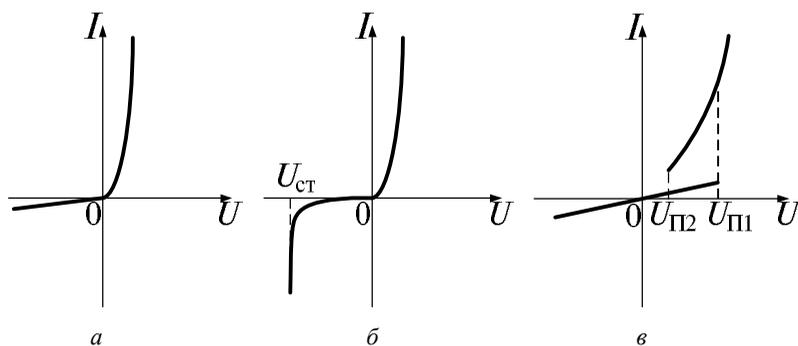


Рис. 17.1. Вольт-амперные характеристики нелинейных элементов:  
 $a$  – диода;  $b$  – стабилитрона;  $c$  – динистора

*Полупроводниковый диод* обладает малым сопротивлением в проводящем направлении и большим сопротивлением при обратной полярности приложенного напряжения. Его вольт-амперная характеристика несимметрична, и в том и в другом направлениях нелинейна (рис. 17.1, *а*).

*Стабилитрон* – полупроводниковый диод с уменьшенной шириной *p-n*-перехода. В прямом направлении его вольт-амперная характеристика (рис. 17.1, *б*) подобна характеристике диода. В обратном направлении при напряжении источника, равном напряжению стабилизации  $U_{ст}$ , наступает пробой перехода. После пробоя ток возрастает, но напряжение на стабилитроне остается практически постоянным. На этом свойстве стабилитрона основано построение схем стабилизаторов напряжения на постоянном токе.

*Динистор* – полупроводниковый прибор с релейным характером изменения сопротивления в прямом направлении (рис. 17.1, *в*). При одной полярности приложенного напряжения и монотонном возрастании этого напряжения от нуля ВАХ динистора до напряжения пробоя  $U_{п1}$  подобна характеристике полупроводникового диода в непроводящем направлении. При напряжении  $U_{п1}$  наступает пробой переходов динистора, сопротивление его резко уменьшается и вольт-амперная характеристика подобна характеристике диода в проводящем направлении. С уменьшением напряжения этой же полярности сопротивление динистора при пороговом напряжении  $U_{п2}$  вновь резко возрастает, и его вольт-амперная характеристика возвращается на прямолинейный участок (см. рис. 17.1, *в*). При другой полярности приложенного напряжения ВАХ динистора аналогична ВАХ полупроводникового диода в непроводящем направлении.

Примеры графических и буквенных обозначений некоторых нелинейных резисторов в электрических схемах приведены на рисунке 17.2.

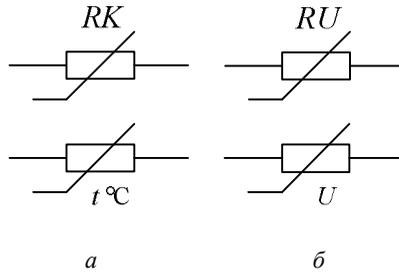


Рис. 17.2. Варианты (вверху или внизу) графического и буквенного обозначений нелинейных резисторов, сопротивление которых зависит от температуры (*а*), от напряжения (*б*)

При решении электротехнических задач по расчету нелинейных электрических цепей принципиально не важна причина нелинейности ВАХ резистивных элементов. Поэтому применяют их буквенное обозначение в схемах в виде, показанном на рисунке 17.3. При этом вместо буквенных обозначений  $R_1$ ,  $R_2$  допускается обозначать нелинейные резисторы НС1, НС2 (нелинейное сопротивление) или НЭ1, НЭ2 (нелинейный элемент).

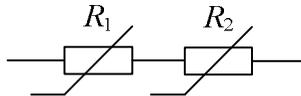


Рис. 17.3. Графическое и буквенное обозначение нелинейных резисторов

Нелинейные резисторы постоянного тока подразделяют на две группы: неуправляемые и управляемые. Управляемые нелинейные резисторы (транзисторы, тиристоры, трехэлектродные электронные лампы и т. п.), в отличие от неуправляемых (лампы накаливания, бареттеры, тиритовые сопротивления, полупроводниковые выпрямительные диоды и др.), имеют, как правило, вспомогательные или управляющие цепи, воздействуя на ток или напряжение которых можно изменять ВАХ основной цепи.

### 17.3. Графический метод расчета нелинейных электрических цепей постоянного тока при последовательном, параллельном соединении

Сущность графического метода расчета простых нелинейных электрических цепей постоянного тока состоит в построении результирующих вольт-амперных характеристик участков цепи с последовательным или параллельным соединением элементов на основании уравнений, составленных по законам Кирхгофа. Метод является приближенным, поэтому от аккуратности и точности графических построений зависит точность решения задачи, результат которого проверяется по законам Кирхгофа.

**Последовательное соединение нелинейных резисторов.** Рассмотрим схему электрической цепи с последовательным соединением нелинейных резисторов (рис. 17.4, *a*). Заданы ВАХ нелинейных резисторов  $I(U_1)$  и  $I(U_2)$ . Требуется определить ток  $I$ , падения напряжений  $U_1$  и  $U_2$ , если известно напряжение питания  $U$ .

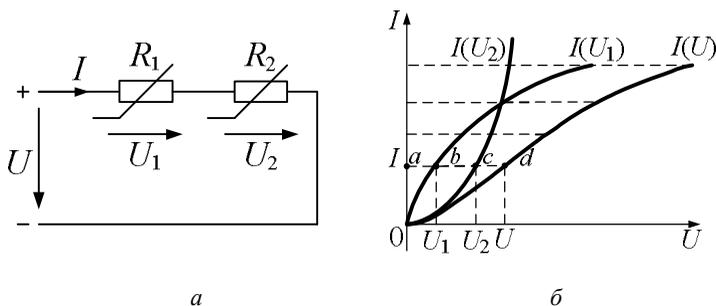


Рис. 17.4. Схема электрической цепи (*a*) и графическое построение результирующей ВАХ (*б*) при последовательном соединении нелинейных резисторов

Поскольку задано напряжение  $U$  на входе цепи, для определения тока в цепи необходимо построить результирующую ВАХ всей цепи  $I(U)$ . Построение результирующей ВАХ равносильно замене нескольких нелинейных резисторов одним эквивалентным с ВАХ  $I(U)$ . При этом руководствуются законами Кирхгофа. В схеме (рис. 17.4, *a*) через все элементы проходит один и тот же ток  $I$ , а напряжение на

---

входе цепи определяется в соответствии со вторым законом Кирхгофа

$$U = U_1 + U_2. \quad (17.1)$$

Результирующую ВАХ строят, используя выражение (17.1). Для этого задаются произвольным значением тока  $I$  (точка  $a$  на рис. 17.4, б), проводят горизонтальную линию до пересечения с ВАХ нелинейных элементов и находят соответствующие напряжения  $U_1$  и  $U_2$ , а также их сумму по выражению (17.1). Полученное напряжение будет соответствовать выбранному току, а точка  $d$  с координатами  $I, U$  будет принадлежать результирующей характеристике  $I(U)$ . Сложение напряжений можно выполнить графически, складывая отрезки линий, соответствующие напряжениям  $U_1$  и  $U_2$  (рис. 17.4, б):

$$ab + ac = ad.$$

Точка  $d$  будет одной из точек результирующей ВАХ. Аналогично, задаваясь рядом значений тока  $I$ , определяют другие точки, соединяют их плавной кривой и получают результирующую ВАХ цепи. По заданному напряжению  $U$  находят искомый ток  $I$ , используя ВАХ  $I(U)$ . Затем по значению тока  $I$ , характеристикам  $I(U_1)$  и  $I(U_2)$  находят напряжения  $U_1$  и  $U_2$ . Результат проверяют по выражению (17.1), при неточности корректируют решение.

Аналогично рассчитывают цепи при последовательном соединении трех и большего числа нелинейных резисторов. Если в цепи имеются линейные резисторы, их ВАХ строят на основании закона Ома.

**Параллельное соединение нелинейных резисторов.** Пусть в схеме электрической цепи (рис. 17.5, а) заданы вольт-амперные характеристики нелинейных резисторов  $I(U_1)$ ,  $I(U_2)$ , а также ток  $I$  на входе цепи. Требуется определить напряжение питания  $U$ , токи  $I_1$  и  $I_2$ .

При построении результирующей ВАХ исходят из того, что напряжение на обоих нелинейных резисторах одинаково, а ток в неразветвленной части схемы находят по первому закону Кирхгофа.

Поскольку известен ток  $I$  на неразветвленном участке цепи, то для определения напряжения  $U$  на входе цепи необходимо построить результирующую ВАХ  $I(U)$ .

Для построения результирующей ВАХ выполняют следующее.

1. Задаются произвольным значением напряжения  $U$ . По ВАХ  $I_1(U)$  и  $I_2(U)$  определяют соответствующие значения  $I_1$  (отрезок  $ab$ ) и  $I_2$  (отрезок  $ac$ ) (рис. 17.5, б).

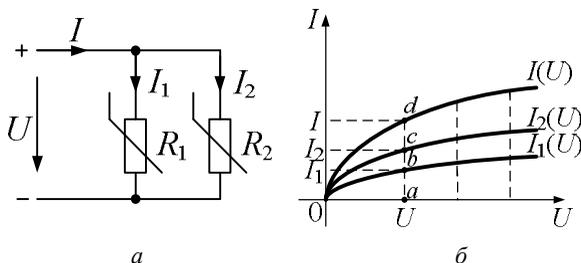


Рис. 17.5. Схема электрической цепи (а) и графическое построение результирующей ВАХ (б) при параллельном соединении нелинейных резисторов

2. Суммируют эти токи в соответствии с первым законом Кирхгофа и получают значение тока на неразветвленном участке цепи:

$$I_1 + I_2 = I, ab + ac = ad.$$

Точка  $d$  будет принадлежать результирующей вольт-амперной характеристике  $I(U)$  (рис. 17.5, б).

3. Аналогично, задаваясь другими значениями напряжения  $U$ , определяют нужное количество точек ВАХ  $I(U)$ , которые соединяют плавной кривой (рис. 17.5, б).

4. По заданному значению тока  $I$  и результирующей ВАХ  $I(U)$  определяют искомое напряжение  $U$ .

5. По найденному значению напряжения с помощью заданных ВАХ  $I_1(U)$  и  $I_2(U)$  определяют  $I_1$  и  $I_2$ .

**Пример 17.1.** Двухполюсник состоит из последовательно включенных резистора  $R = 100$  Ом и германиевого диода  $VD$  (рис. 17.6). ВАХ двухполюсника  $I(U)$  задана (табл. 17.1). Построить ВАХ диода  $I(U_2)$ . Определить напряжения  $U, U_1, U_2$  при  $I = 10$  мА.

Таблица 17.1

Вольт-амперная характеристика нелинейной цепи

$U, \text{В}$	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0
$I, \text{мА}$	0	1,2	3,5	6,4	9,4	12,3

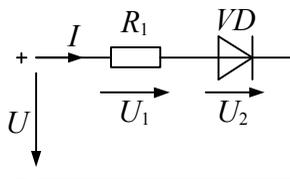


Рис. 17.6. Схема нелинейной цепи

**Решение.** Расчет проводим графическим методом. Построим ВАХ двухполюсника  $I(U)$  (см. рис. 17.6) на основании данных таблицы 17.1. Чтобы построить ВАХ линейного резистора  $I(U_1)$ , необходимы хотя бы две точки. Зададимся произвольно значением тока, протекающего по резистору.

Пусть

$$I = 8 \text{ мА} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ А},$$

тогда

$$U_1 = IR = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0,8 \text{ В}.$$

По двум точкам с координатами  $0; 0$  и  $8 \text{ мА}; 0,8 \text{ В}$  строим линейную характеристику  $I(U_1)$  (рис. 17.7).

Для построения ВАХ диода необходимо произвести вычитание абсцисс ВАХ  $I(U)$  и  $I(U_1)$ , соответствующих каждому произвольно принятому значению тока. Например, для тока  $I = 10 \text{ мА}$   $ab = ad - ac$ . Приняв другие значения тока, получим другие точки ВАХ  $I(U_2)$ .

По заданному току двухполюсника  $I = 10 \text{ мА}$  проводим горизонтальную линию  $ad$  и на пересечении с ВАХ в точках  $b$  и  $d$  находим соответствующие напряжения, т. е.  $U_2 = 0,68 \text{ В}$  и  $U = 1,68 \text{ В}$ .

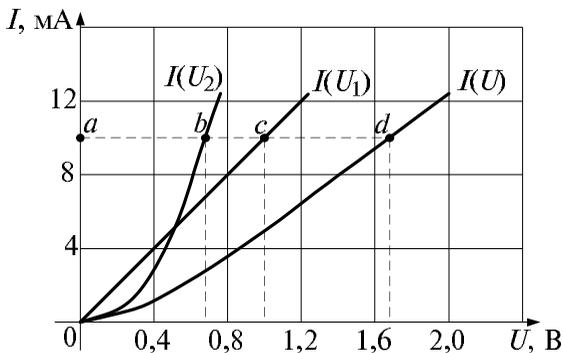


Рис. 17.7. Вольт-амперные характеристики нелинейной цепи

На основании второго закона Кирхгофа

$$U_2 = U - U_1.$$

По закону Ома

$$U_1 = RI = 100 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 1 \text{ В.}$$

Проверка:  $U_1 + U_2 = U$ ;  $1 + 0,68 = 1,68$ , т. е. расчет выполнен правильно.

**Пример 17.2.** Для стабилизации напряжения на приемнике параллельно ему присоединили стабилитрон (рис. 17.8), ВАХ которого  $I_1(U_n)$  задана (рис. 17.9). Определить пределы изменения напряжения приемника  $U_n$ , если напряжение источника питания  $U = 12 \text{ В}$  изменяется в пределах  $\pm 10\%$ . Сопротивление  $R_1 = 1,2 \text{ кОм}$ ,  $R_n = 10 \text{ кОм}$ .

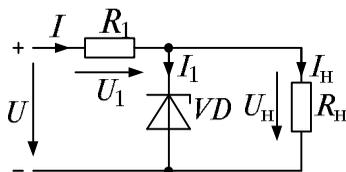


Рис. 17.8. Схема нелинейной цепи

**Решение.** Строим результирующую ВАХ смешанного соединения резисторов в соответствии с методикой, изложенной на с. 322–324. Для этого на графике с ВАХ стабилитрона достраиваем ВАХ резистора и ВАХ приемника. Затем строим результирующую ВАХ  $I(U_n)$  параллельного соединения стабилитрона  $VD$  и резистора приемника  $R_n$ , далее – результирующую ВАХ  $I(U)$  последовательного соединения резистора  $R_1$  и эквивалентного нелинейного элемента  $R_{n//D}$ .

Чтобы выполнить указанные преобразования, воспользуемся методами построения результирующих ВАХ для параллельного и последовательного соединений резисторов.

Вольт-амперные характеристики линейных элементов  $R_1$  и  $R_n$  строим, задавшись произвольными значениями токов:  $I = 5 \text{ мА}$ . Тогда  $U_1 = IR_1 = 5 \cdot 10^{-3} \times 1,2 \cdot 10^{-3} = 6 \text{ В}$ ;  $I_n = 1 \text{ мА}$ , тогда  $U_n = I_n R_n = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 10 \text{ В}$ .

По двум точкам (0; 0 и 5 мА; 6 В) проводим прямую линию и получаем характеристику  $I(U_1)$ . Аналогично по двум точкам (0; 0 и 1 мА; 10 В) строим ВАХ  $I_H(U_H)$  (рис. 17.9).

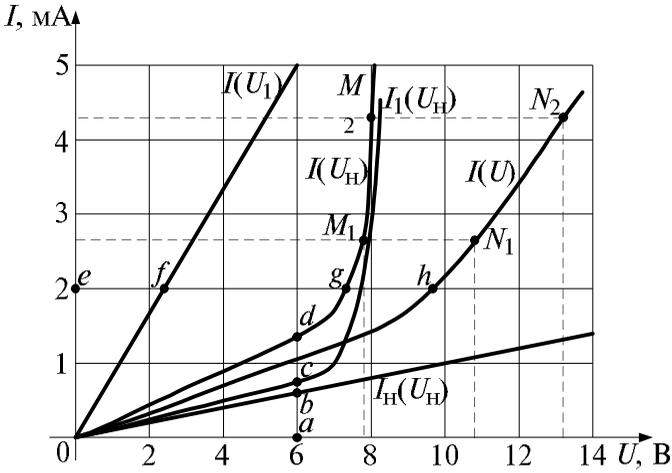


Рис. 17.9. Вольт-амперные характеристики цепи

Зависимость  $I(U_H)$  для параллельного соединения получаем суммированием ординат ВАХ стабилитрона  $I_1(U_H)$  и приемника  $I_H(U_H)$ , соответствующих выбранному напряжению. Например, при  $U_H = 6$  В суммируем отрезки  $ab$  и  $ac$  и получаем точку  $d$  характеристики  $I(U_H)$ . Аналогично получаем и для других значений  $U_H$ .

Для последовательного соединения зависимость  $I(U)$  определяем суммированием абсцисс характеристик  $I(U_1)$  и  $I(U_H)$ , соответствующих выбранному току. Например, при  $I = 2$  мА суммируем отрезки  $ef$  и  $eg$  и получаем точку  $h$  характеристики  $I(U)$ . Аналогично поступаем, выбирая аналогичные значения для  $I$ . Кривая  $I(U)$  является результирующей ВАХ всей цепи.

По условию задачи напряжение  $U$  изменяется в пределах  $\pm 10\%$ , т. е. от  $0,9U = 0,9 \cdot 12 = 10,8$  В до  $1,1U = 1,1 \cdot 12 = 13,2$  В.

Чтобы определить, в каких пределах при этом изменяется  $U_H$ , воспользуемся двумя характеристиками:  $I(U)$  и  $I(U_H)$ .

По ВАХ  $I(U)$  при  $U = 10,8 \text{ В}$   $I = 2,7 \text{ мА}$  (точка  $M_1$ );  
при  $U = 13,2 \text{ В}$   $I = 4,3 \text{ мА}$  (точка  $M_2$ ).

По ВАХ  $I(U_n)$  при  $I = 2,7 \text{ мА}$   $U_n = 7,8 \text{ В}$  (точка  $M_1$ );  
при  $I = 4,3 \text{ мА}$   $U_n = 8 \text{ В}$  (точка  $M_2$ ).

Изменение напряжения на нагрузке

$$\Delta U_n = 8 - 7,8 = 0,2 \text{ В},$$

или в процентном выражении к среднему напряжению на нагрузке

$$\Delta U_{n, \text{cp}} = \frac{0,2}{7,9} \cdot 100 \% \approx 2,5 \%.$$

Таким образом, при колебаниях напряжения источника на  $\pm 10 \%$  напряжение на нагрузке изменяется только на  $\pm 1,25 \%$ , т. е. в 8 раз меньше.

#### 17.4. Нелинейные цепи переменного тока

Нелинейные цепи переменного тока могут содержать как активные, так и реактивные нелинейные элементы: нелинейные резисторы, нелинейные катушки индуктивности и нелинейные конденсаторы. Катушка индуктивности с ферромагнитным сердечником является нелинейной за счет нелинейной зависимости магнитного потока в сердечнике от протекающего по обмотке катушки тока. Катушку с ферромагнитным сердечником часто называют дросселем. У нелинейных конденсаторов между обкладками находится сегнетодиэлектрик (сегнетовая соль, титанат бария), который в отличие от обычных диэлектриков обладает способностью самопроизвольно (без внешнего электрического поля) поляризоваться. Он имеет сильную зависимость диэлектрической проницаемости от напряженности поля, давления, температуры, а также большое значение диэлектрической проницаемости. Нелинейные конденсаторы называют еще варикондами. Изображение нелинейных элементов на схемах электрических цепей переменного тока приведено на рисунке 17.10.

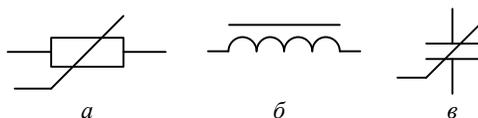


Рис. 17.10. Изображение нелинейных элементов на схемах электрических цепей переменного тока:  
 $a$  – нелинейный резистор;  $b$  – нелинейная катушка индуктивности;  
 $в$  – нелинейный конденсатор

---

Существуют нелинейные резистивные элементы, у которых время установления режима соизмеримо с периодом переменного тока, т. е. проявляется инерционность. По этому показателю нелинейные резистивные элементы разделяют на инерционные и безынерционные.

К *инерционным* относятся те нелинейные элементы, нелинейность характеристик которых обусловлена температурным режимом (лампы накаливания, термисторы). Установление температурного режима в таких элементах требует некоторого времени. Температура и, следовательно, сопротивление такого элемента определяются действующим значением тока в нем. Таким образом, для действующих значений тока и напряжения инерционный элемент является нелинейным, а для мгновенных значений в интервале периода – линейным.

Вольт-амперные характеристики *безынерционных* нелинейных элементов остаются практически неизменными в широком диапазоне частот. Нелинейность таких элементов проявляется как для действующих, так и для мгновенных значений величин, приводит к искажению форм кривых тока, напряжения, магнитного потока, электрического заряда на их зажимах. Например, при синусоидальном напряжении на зажимах безынерционного нелинейного резистора ток в нем будет несинусоидальным и, наоборот, при синусоидальном токе напряжение на зажимах резистора будет несинусоидальным. К безынерционным нелинейным элементам относят полупроводниковые приборы: диоды, туннельные диоды, транзисторы, стабилитроны, тиристоры и др.

Различают статические и динамические характеристики нелинейных элементов. Статическими характеристиками нелинейных элементов называются соответствующие зависимости тока и напряжения – для резистора; потокосцепления и тока – для катушки; электрического заряда и напряжения – для конденсатора, полученные при медленном изменении переменных. Динамическими характеристиками нелинейных элементов называются те же зависимости  $u(i)$ ,  $\psi(i)$ ,  $q(u)$ , но полученные при быстрых изменениях переменных. При сравнительно невысоких частотах динамические характеристики практически совпадают со статическими. Сущест-

венные различия этих характеристик начинают проявляться в области высоких частот, например радиочастот.

Процессы в нелинейных цепях переменного тока описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, составляемыми на основе законов Кирхгофа. Общего метода решения таких уравнений не существует. Для анализа процессов в нелинейных цепях переменного тока можно использовать графический или графоаналитический метод расчета, который может быть произведен с некоторой степенью точности. В зависимости от того, какое нелинейное явление в цепи исследуется, какой характер цепи, характеристики нелинейных элементов, используется один из перечисленных выше методов расчета.

Все задачи по расчету нелинейных цепей переменного тока в установившемся режиме можно разделить на две группы. К первой группе относятся задачи, в которых целью расчета является определение действующих значений токов и напряжений. Такие задачи встречаются в электроэнергетике, где искажение форм кривых токов и напряжений незначительны и не играют существенную роль. Ко второй группе относятся задачи, в которых целью расчета является определение мгновенных значений токов и напряжений, а также форм кривых и гармонических спектров функций. Такие задачи встречаются в электронике, где принцип действия устройств основан на преобразовании форм кривых переменных с помощью нелинейных характеристик элементов.

В электрических цепях, содержащих нелинейные элементы, искажения форм кривых токов и напряжений незначительны, играют второстепенную роль и ими можно пренебречь. Для исследования таких цепей можно применять так называемый *метод эквивалентных синусоид*. Сущность метода состоит в том, что при незначительных искажениях форм кривых несинусоидальные функции токов и напряжений  $i(t)$  и  $u(t)$  заменяются эквивалентными по действующему значению синусоидальными функциями.

При малых искажениях форм кривых высшие гармоники практически не влияют на действующее значение функции, и действующее значение несинусоидальной функции практически равно действующему значению ее первой гармоники. Поэтому расчет

---

---

нелинейных цепей переменного тока ведут по действующим значениям тока и напряжения для первых гармоник, пренебрегая высшими гармониками.

### **17.5. Катушка с ферромагнитным сердечником в цепи переменного тока**

**Напряжение, ток и магнитный поток в катушке с ферромагнитным сердечником.** Один из наиболее распространенных нелинейных элементов в цепях переменного тока – индукционная катушка с ферромагнитным сердечником, применяемая при создании электрических машин переменного тока и разнообразной электрической аппаратуры. Ферромагнитные сердечники применяются для усиления магнитного поля и придания ему требуемой конфигурации.

Одной из особенностей катушек с ферромагнитными сердечниками является то, что токи в обмотках и магнитные потоки в сердечнике взаимосвязаны, т. е. магнитный поток зависит от тока в обмотке, а токи зависят от характера изменения магнитного потока, что усложняет анализ таких цепей. Кроме того, наряду с активной мощностью, потребляемой активным сопротивлением обмотки катушки, имеет место потеря энергии, расходуемая на нагрев сердечника. Это обусловлено явлением гистерезиса и вихревыми токами. Активную мощность, идущую на нагрев сердечника, часто называют потерями мощности в стали  $P_{ст}$ .

При протекании переменного тока по обмотке катушки возникает переменный магнитный поток, под действием которого в результате электромагнитной индукции будет наводиться ЭДС во всех контурах, пронизываемых магнитным потоком, а следовательно, и в стальном сердечнике. В результате возникают вихревые токи, которые замыкаются по сердечнику (токи Фуко).

Вихревые токи (см. гл. 7) вызывают, согласно закону Джоуля – Ленца, нагрев сердечника, т. е. имеет место потеря электрической энергии. Кроме того, токи Фуко создают свой магнитный поток, который, согласно правилу Ленца, будет направлен против основного магнитного потока, тем самым оказывая размагничивающее действие.

Для уменьшения потерь энергии от вихревых токов и снижения размагничивающего действия магнитопровод изготавливают из тонких листов стали, изолированных друг от друга. Плоскость листов должна быть параллельна направлению магнитного потока, чтобы не увеличивалось магнитное сопротивление. Уменьшение токов Фуко в этом случае происходит за счет повышения электрического сопротивления, так как токи замыкаются в тонких листах по узким вытянутым путям (см. рис. 7.5, б).

Для различных частот существует своя оптимальная толщина листов. В частности, при промышленной частоте 50 Гц применяют листы толщиной 0,35–0,5 мм, при частоте порядка тысяч герц – листы толщиной 0,02–0,05 мм, а при более высокой частоте толщина листов доходит до 0,005 мм.

С целью повысить электрическое сопротивление при производстве электротехнической стали добавляют до 4,8 % кремния.

При высоких частотах (до 30–50 МГц) применяют сердечники, выполненные из магнитодиэлектриков или ферритов, которые обладают большим удельным электрическим сопротивлением. *Магнитодиэлектрики* состоят из спрессованных зерен ферромагнитного вещества и связывающего их диэлектрика. *Ферриты* – магнитные материалы полупроводникового типа, изготовленные из опресованных порошков с последующим обжигом.

Если пренебречь неравномерностью распределения магнитного тока в поперечном сечении листов магнитопровода, то мощность потерь от вихревых токов можно рассчитать по формуле

$$P_{\text{в}} = \sigma_{\text{в}} f^2 B_{\text{м}}^2 m,$$

где  $\sigma_{\text{в}}$  – коэффициент вихревых токов, зависящий от сорта стали и толщины стальных листов;

$f$  – частота тока;

$B_{\text{м}}$  – амплитуда магнитной индукции;

$m$  – масса сердечника.

Как отмечалось ранее, ферромагнитным материалам присущ гистерезис, из-за которого в сердечнике теряется мощность, описываемая эмпирической формулой:

$$P_r = \sigma_r f B_m^n m,$$

где  $\sigma_r$  – гистерезисный коэффициент, зависящий от сорта стали и размеров стальных листов (определяется экспериментально);

$n$  – показатель степени ( $n = 1,6$  при  $B_m < 1$  Тл;  $n = 2$  при  $B_m = 1 \dots 1,6$  Тл).

Для уменьшения потерь на гистерезис сердечники электрических устройств переменного тока изготавливают из магнитомягких ферромагнетиков с узкой петлей гистерезиса.

Суммарную потерю мощности в сердечнике можно определить по формуле

$$P_{ст} = P_{уд} m,$$

где  $P_{уд}$  – удельные потери мощности на 1 кг массы сердечника (Вт/кг), которые приводятся в справочной литературе;

$m$  – масса сердечника, кг.

Если катушка с ферромагнитным сердечником (рис. 17.11) с числом витков  $N$  подключена к источнику синусоидального напряжения  $u = U_m \sin \omega t$ , то переменный ток, протекающий по ее обмотке, возбуждает переменный магнитный поток  $\Phi$ , большая часть которого  $\Phi_0$  (основной магнитный поток) замыкается по сердечнику из-за магнитной проницаемости в стали, которая в тысячи раз превышает магнитную проницаемость воздуха. Небольшая часть потока  $\Phi_p$  замыкается полностью или частично по воздуху. Эту часть потока называют *поток рассеяния*, каждый из которых индуцирует в обмотке ЭДС.

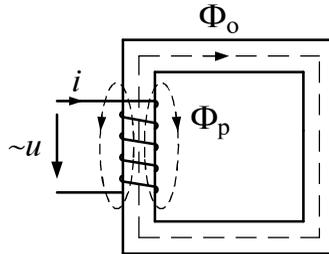


Рис. 17.11. Схема распределения магнитных потоков в катушке с ферромагнитным сердечником

Таким образом, ток в обмотке есть результат совместного действия приложенного напряжения  $u$  и ЭДС  $e_o$  и  $e_p$ , индуцируемых основным потоком и потоком рассеяния:

$$i = \frac{u + e_o + e_p}{R}, \quad (17.2)$$

где  $R$  – активное сопротивление обмотки.

Из выражения (17.2) следует, что

$$u = -e_o - e_p + iR.$$

Активное падение напряжения  $iR$  обычно относительно мало, равно как и ЭДС рассеяния, и для анализа общего характера процесса ими можно пренебречь и считать, что  $u = -e_o$ .

Поскольку ЭДС, возбуждаемая основным магнитным потоком,

$$e_o = -N \frac{d\Phi}{dt},$$

то

$$U_m \sin \omega t = N \frac{d\Phi_o}{dt}. \quad (17.3)$$

На основании равенства (17.3) можно найти закон изменения основного магнитного потока во времени:

$$d\Phi_o = \frac{U_m}{N} \sin \omega t dt;$$

$$\Phi_o = \frac{U_m}{N} \int \sin \omega t dt = -\frac{U\sqrt{2}}{\omega N} \cos \omega t + A = \frac{U\sqrt{2}}{2\pi f N} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + A.$$

Постоянная интегрирования  $A$  изображает некоторый постоянный магнитный поток, который в сердечниках переменного тока в установившихся режимах отсутствует, т. е.  $A = 0$ . Таким образом, с достаточной степенью точности можно считать, что основной магнитный поток изменяется по синусоидальному закону при подключении катушки к источнику синусоидального напряжения:

$$\Phi_o = \frac{U}{4,44Nf} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

В расчетных формулах используется понятие амплитуды магнитного потока, так как понятие действующего значения физического смысла не имеет:

$$\Phi_{om} = \frac{U_m}{N\omega}.$$

Между основным магнитным потоком и током, возбуждающим этот поток, существует нелинейная зависимость. Это является причиной того, что при синусоидальном напряжении источника ток в обмотке будет несинусоидальным, что несложно показать при помощи графических построений (рис. 17.12).

При построении зависимости  $i(t)$  ординаты кривой тока для первой четверти периода определяются на основании восходящей ветви петли гистерезиса (участок  $ab$ ), для второй четверти периода на основании нисходящей ветви (участок  $bc$ ) и т. д. Таким образом, ток и магнитный поток одновременно достигают своих максимальных значений, но ток опережает магнитный поток по фазе.

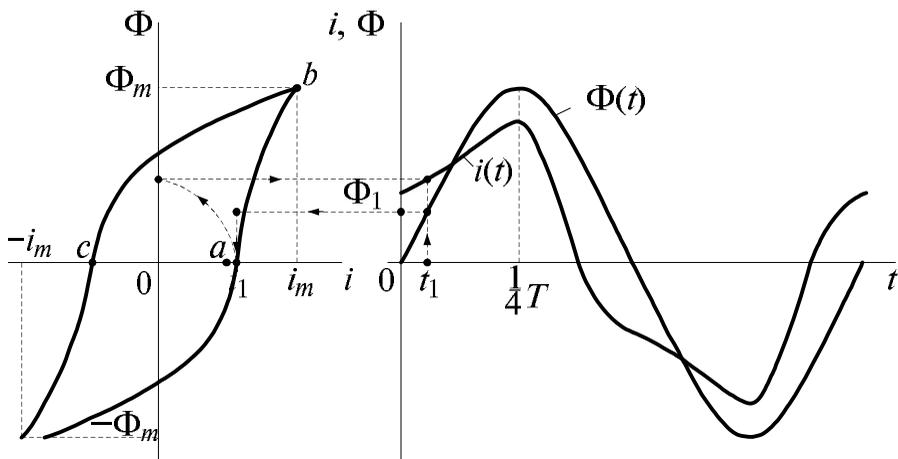


Рис. 17.12. Построение графика изменения намагничивающего тока во времени на основании петли гистерезиса ферромагнитного материала

Насыщение ферромагнетика вызывает возникновение пика в кривой тока, соответствующего четверти периода. Чем больше магнитная индукция в сердечнике, тем выше и острее этого тока. Зависимость тока от времени является несинусоидальной.

**Уравнение, векторная диаграмма и схема замещения катушки с ферромагнитным сердечником.** При анализе общего характера процесса подключения индуктивной катушки с ферромагнитным сердечником к источнику синусоидального напряжения пренебрегли потоком рассеяния и активным сопротивлением обмотки катушки. Для уточнения представления о тех явлениях, которые сопровождают протекание тока по обмотке катушки, нужно отметить следующее. Основной магнитный поток, как было указано выше, нелинейно связан с током. Он пронизывает все витки обмотки и индуцирует ЭДС:

$$e_0 = -N \frac{d\Phi_0}{dt}.$$

При синусоидальном основном магнитном потоке индуцируемая им ЭДС тоже синусоидальная и отстает от потока на  $90^\circ$ :

$$e_{om} = -N \frac{d(\Phi_{om} \sin \omega t)}{dt} = -N\omega\Phi_{om} \cos \omega t = N\omega\Phi_{om} \sin (\omega t - 90^\circ).$$

Действующее значение ЭДС

$$E_0 = 2\pi f N \frac{\Phi_{om}}{\sqrt{2}} = 4,44 f N \Phi_{om}.$$

Поток рассеяния замыкается полностью или частично по воздуху. Поскольку сопротивление воздуха магнитному потоку во много раз превышает сопротивление потоку в стали, магнитная проницаемость в воздухе  $\mu_0$  постоянная, то можно считать, что потокосцепление рассеяния  $\psi_p$  линейно зависит от намагничивающего тока:

$$\psi_p = L_p i,$$

где  $L_p$  – индуктивность, обусловленная потоком рассеяния, который, пронизывая витки обмотки катушки, индуцирует ЭДС:

$$e_p = -\frac{d\psi_p}{dt} = -L_p \frac{di}{dt}.$$

Обмотка катушки обладает активным сопротивлением  $R$ . Таким образом, напряжение, приложенное к зажимам катушки, должно иметь три составляющие: первая уравнивает ЭДС, наводимую основным магнитным потоком  $u_0 = -e_0$ ; вторая – ЭДС рассеяния

$u_p = -e_p = L_p \frac{di}{dt}$ ; третья компенсирует падение напряжения в активном сопротивлении  $u_R = iR$ .

Уравнение электрического состояния, учитывающее эти три составляющие, имеет следующий вид:

$$u = u_0 + u_p + u_R.$$

При наличии ферромагнитного сердечника ток в обмотке индуктивной катушки изменяется по несинусоидальному закону. Однако в расчетах цепей, содержащих катушки с ферромагнитными сердечниками, в большинстве случаев допустимо существенное упрощение реальных условий, заключающихся в замене действительного несинусоидального тока эквивалентным синусоидальным. Условием эквивалентности токов является равенство действующих значений этих токов и равенство вызываемых ими потерь мощности. Такая замена существенно упрощает расчеты, так как позволяет применять методы расчета цепей синусоидального тока.

Уравнения электрического состояния катушки можно записать для действующих значений в комплексной форме:

$$\dot{U} = \dot{U}_0 + \dot{U}_p + R\dot{I}.$$

Поскольку  $u_p = -e_p = L_p \frac{di}{dt} = I_m \omega L_p \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$ , то комплекс действующего значения

$$\dot{U}_p = I \omega L_p e^{j\frac{\pi}{2}} = jX_p \dot{I},$$

где  $X_p$  – индуктивное сопротивление, обусловленное потокоцеплением рассеяния.

Уравнение катушки в комплексной форме примет вид

$$\dot{U} = \dot{U}_0 + j\omega L_p \dot{I} + \dot{I}R. \quad (17.4)$$

Соотношения напряжения и тока катушки наглядно иллюстрирует ее векторная диаграмма (рис. 17.13).

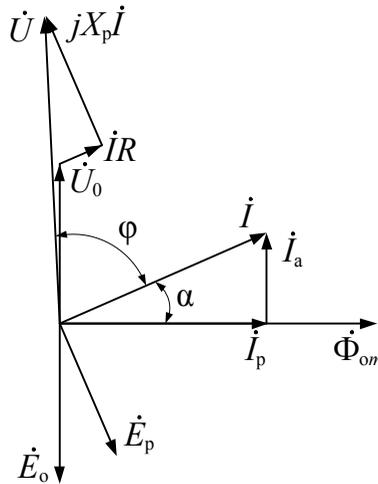


Рис. 17.13. Векторная диаграмма катушки с ферромагнитным сердечником

При построении за исходный вектор удобно взять вектор амплитуды основного магнитного потока  $\dot{\Phi}_{om}$ . Вектор тока  $\dot{I}$ , как уже было показано выше, должен опережать вектор магнитного потока  $\dot{\Phi}_{om}$  на угол  $\alpha$ , угол магнитного запаздывания, из-за потерь мощности в сердечнике. Исходя из этого, можно считать, что ток состоит из двух составляющих, одна из них представляет реактивный ток  $I_p = \cos \alpha$ , возбуждающий основной магнитный поток и совпадающий с ним по фазе, другая – активный ток  $I_a = \sin \alpha$ , обусловленный потерями мощности в ферромагнитном сердечнике от гистерезиса и вихревых токов.

Таким образом,

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}. \quad (17.5)$$

Вектор ЭДС  $\dot{E}_0$ , индуцируемой основным потоком, отстает от него на  $90^\circ$ , а вектор ЭДС  $\dot{E}_p$ , индуцируемой потоком рассеяния, отстает от вектора тока  $\dot{I}$  на  $90^\circ$ .

Вектор напряжения  $\dot{U}$ , приложенного к катушке, определяют на основании уравнения (17.4) путем суммирования трех составляющих:  $\dot{U}_0$ ,  $\dot{I}R$  и  $jX_p\dot{I}$ . Уравнениям (17.4), (17.5) и векторной диаграмме должна соответствовать схема замещения, при построении которой уравнение можно рассматривать как первый и второй закон Кирхгофа для схемы со смешанным соединением сопротивлений, представленной на рисунке 17.14, а.

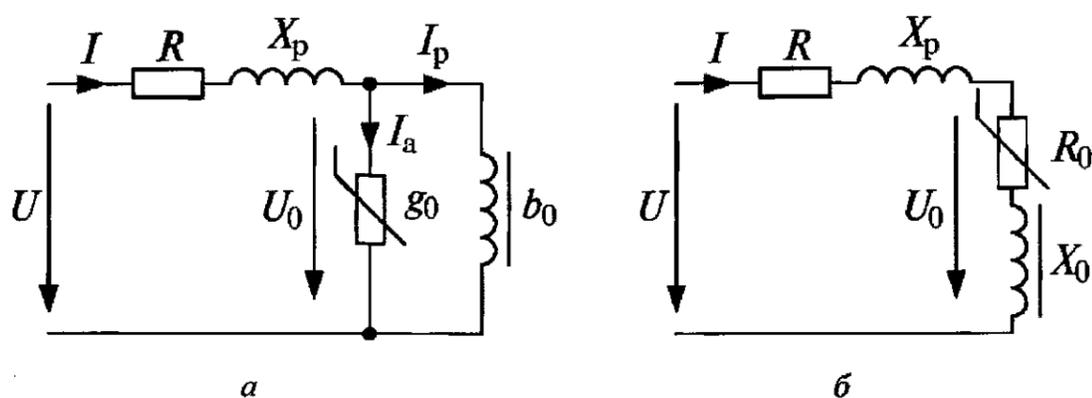


Рис. 17.14. Схема замещения катушки с ферромагнитным сердечником при смешанном (а) и последовательном (б) соединении сопротивлений

Поскольку ток состоит из двух составляющих, то одна из параллельных ветвей – ветвь намагничивающего тока, обладает только реактивной проводимостью, другая обладает только активной проводимостью, обусловленной потерями мощности в сердечнике, и эти проводимости непостоянны.

Проводимости можно определить следующим образом. Активная проводимость

$$g_0 = \frac{I_a}{U_0}.$$

Если учесть, что  $U \approx U_0$ , то

$$g_0 = \frac{I}{U} = \frac{IU}{U^2} = \frac{P_{\text{ст}}}{U^2},$$

где  $P_{\text{ст}}$  – потеря мощности в стали.

Реактивная проводимость

$$b_0 = \frac{I_p}{U_p} = \frac{I_p U}{U^2} = \frac{Q_{\text{ст}}}{U^2},$$

где  $Q_{\text{ст}}$  – реактивная мощность, необходимая для возбуждения основного магнитного потока.

Разветвленный участок схемы замещения (рис. 17.14, а) можно заменить неразветвленным с последовательным соединением эквивалентных сопротивлений (рис. 17.14, б):

$$R_0 = \frac{P_{\text{ст}}}{I^2} = \frac{g_0}{g_0^2 + b_0^2};$$

$$X_0 = \sqrt{Z_0^2 - R_0^2} = \sqrt{\frac{U_0}{I^2} - R_0^2} \quad \text{или} \quad X_0 = \frac{b_0}{g_0^2 + b_0^2}.$$

На ток катушки влияет размер воздушного зазора в ее сердечнике. Как известно, магнитная проницаемость воздуха значительно меньше магнитной проницаемости стали, поэтому воздушный зазор имеет значительно большее магнитное сопротивление, чем участок той же длины из ферромагнитного материала. Наличие воздушного зазора приводит к увеличению магнитного сопротивления сердечника. Это значит, что при одном и том же токе  $I$  магнитный поток  $\Phi_0$  будет меньше. Соответственно уменьшится и наводимая этим потоком ЭДС  $E_0$  и равное ей напряжение  $U_0$ . Как видно из уравнения индуктивной катушки (17.4), при неизменном напряжении  $U$  уменьшение напряжения  $U_0$  вызовет увеличение падений напряжения  $RI$  и  $\omega L_p I$  вследствие увеличения тока.

Влияние зазора на ток катушки имеет определенное практическое значение. Например, в сварочных трансформаторах изменением зазора в сердечнике регулируют величину требуемого сварочного тока. Повышенная вибрация и гул катушки магнитного пускателя указывают на неплотное примыкание частей магнито-

---

---

провода вследствие образования ржавчины, попадания инородных частей и на необходимость профилактического обслуживания.

### Вопросы и задачи для самоконтроля

1. Дайте определение линейной и нелинейной электрическим цепям.
2. Нарисуйте по своему усмотрению вольт-амперные характеристики нелинейных резисторов.
3. Назовите способы представления вольт-амперной характеристики.
4. Объясните законы Кирхгофа для нелинейных электрических цепей постоянного тока, правила знаков.
5. Изложите последовательность графического метода расчета нелинейной электрической цепи постоянного тока:
  - а) при последовательном соединении резисторов;
  - б) параллельном соединении резисторов;
  - в) смешанном соединении резисторов.
6. Перечислите нелинейные элементы, которые создают сопротивление в цепи переменного тока.
7. Назовите методы расчета, используемые для нелинейных электрических цепей переменного тока.
8. Поясните, что означают вольт-амперная, вебер-амперная, кулон-вольтная характеристики.
9. Постройте вольт-амперную характеристику линейного резистора ( $R = 100 \text{ м}^2$ ).
10. Объясните, какую роль в катушке индуктивности с ферромагнитным сердечником выполняет сердечник.
11. Назовите материал, используемый для изготовления сердечника.
12. Перечислите виды потерь энергии в сердечнике. От каких величин они зависят?
13. Поясните, как достигают уменьшения потерь в стали.
14. Запишите связь между ЭДС наводимой в обмотке катушки и переменным магнитным потоком в сердечнике.

## 17. Нелинейные цепи

---

15. Объясните, что значит основной магнитный поток и поток рассеяния.

16. Запишите уравнение катушки в комплексной форме, поясните значение каждого из слагаемых этого уравнения.

17. Нарисуйте последовательно-параллельную схему замещения катушки с ферромагнитным сердечником, поясните назначение каждого из элементов этой схемы.

18. Расскажите, какие упрощения допускаются при расчете катушек с ферромагнитным сердечником и почему.

19. Перечислите, где находит применение катушка с ферромагнитным сердечником.

## **18. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ**

---

### **18.1. Причины возникновения переходных процессов. Законы коммутации**

Переходный процесс в электрической цепи – это электромагнитный процесс, возникающий в электрической цепи при переходе от одного установившегося режима к другому. Режим, при котором ЭДС, напряжения и токи в цепи являются постоянными или периодическими, называют установившимся. Начало переходного процесса – это момент коммутации в электрической цепи (отключение, подключение цепи к источнику внешнего питания, отключение или подключение отдельных элементов или участков цепи, короткое замыкание).

Переходные процессы в электрической цепи возникают, если в ней имеются индуктивные или емкостные элементы, обладающие способностью запасать и отдавать энергию магнитного или электрического поля. В момент коммутации (начало переходного процесса) происходит перераспределение энергии между индуктивными, емкостными элементами цепи как между собой, так и с внешними источниками энергии, подключенными к цепи. В случаях отключения от внешних источников питания переходный процесс возникает за счет энергии электромагнитного поля, накопленной до начала коммутации в индуктивных и емкостных элементах цепи. Запасенная в индуктивной катушке или электрическом конденсаторе энергия безвозвратно преобразуется в другие виды энергии (например, в тепловую на активном сопротивлении) или перераспределяется между индуктивным и емкостным элементами.

После окончания переходного процесса наступает новый установившийся режим, который определяется только внешними источниками энергии. Изменения энергии магнитного и электрического полей не могут происходить мгновенно, и, следовательно, не могут мгновенно протекать электромагнитные процессы в момент

коммутации. Скачкообразное (мгновенное) изменение энергии в индуктивном или емкостном элементе приводит к необходимости иметь бесконечно большую мгновенную мощность  $p = dW/dt$ , что практически невозможно, ибо в реальных электрических цепях бесконечно большой мощности не существует.

Таким образом, переходные процессы не могут протекать мгновенно. С точки зрения математики переходные процессы заканчиваются за время, равное бесконечности ( $t = \infty$ ). Практически же переходные процессы являются быстропротекающими, и их длительность обычно составляет доли секунды. Так как энергия магнитного  $W_m$  и электрического  $W_e$  полей описывается выражениями

$$W_m = \frac{Li^2}{2}, \quad W_e = \frac{Cu^2}{2},$$

ток в индуктивности и напряжение на емкости не могут изменяться мгновенно. На этом основаны законы коммутации.

*Первый закон коммутации:* ток в ветви с индуктивным элементом в начальный момент времени после коммутации имеет то же значение, какое он имел непосредственно перед коммутацией, а затем изменяется именно с этого значения. Первый закон коммутации записывают в следующем виде:

$$i_L(0) = i_L(0_-) = i_L(0_+),$$

считая, что коммутация происходит мгновенно в момент  $t = 0$ .

Аналогично первый закон коммутации записывается и для потокосцепления  $\Psi$ :  $\Psi(0) = \Psi(0_-) = \Psi(0_+)$ . То есть магнитный поток, сцепленный с витками катушки (потокосцепление), в момент коммутации сохраняет то значение, которое имел до коммутации, и начинает изменяться именно с этого значения.

*Второй закон коммутации:* напряжение на емкостном элементе в начальный момент после коммутации имеет то же значение, какое оно имело непосредственно перед коммутацией, а затем изменяется именно с этого значения. Второй закон коммутации записывают в следующем виде:

$$u_C(0) = u_C(0_-) = u_C(0_+).$$

---

Второй закон коммутации можно сформулировать и через электрический заряд на конденсаторе. Электрический заряд на конденсаторах, присоединенных к любому узлу, в момент коммутации сохраняет то значение, которое он имел до коммутации, и начинает изменяться именно с этого значения:

$$q(0) = q(0_-) = q(0_+).$$

В электрических цепях с резистивными элементами энергия электромагнитного поля не запасается. В результате в них переходные процессы не возникают, т. е. в таких цепях стационарные режимы устанавливаются мгновенно, скачком. В действительности любая электрическая цепь обладает каким-то сопротивлением  $R$ , индуктивностью  $L$  и электрической емкостью  $C$  за счет проводов, воздушных или кабельных линий. В реальных электротехнических устройствах существуют тепловые потери, обусловленные прохождением тока и наличием сопротивления  $R$ , а также магнитные и электрические поля.

Переходные процессы в реальных электротехнических устройствах можно ускорять или замедлять путем подбора соответствующих параметров элементов цепей, а также за счет применения специальных устройств.

## **18.2. Классический метод расчета переходных процессов**

Существует ряд методов расчета переходных процессов. Рассмотрим наиболее применяемый – классический метод расчета.

*Классический метод расчета* переходных процессов заключается в решении дифференциальных уравнений, описывающих изменения токов и напряжений на участках цепи в переходном процессе. В общем случае при использовании классического метода расчета составляются уравнения электромагнитного состояния цепи после коммутации по второму закону Кирхгофа для мгновенных значений напряжений и токов, связанных между собой на отдельных элементах цепи соотношениями, приведенными в таблице 18.1.

Таблица 18.1

**Связь мгновенных значений напряжений и токов  
на элементах электрической цепи**

Резистор (идеальное активное сопротивление)	Катушка индуктивности (идеальная индуктивность)	Конденсатор (идеальная электрическая емкость)
$u_R = Ri_R$	$u_L = L \frac{di_L}{dt};$ при наличии магнитной связи с катушкой, обтекаемой током $i_M$ , $u_L = L \frac{di_L}{dt} \pm M \frac{di_M}{dt}$	$u_C = C \frac{du_C}{dt};$ $u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$

Переходные процессы анализируют путем решения дифференциальных уравнений, составленных для исследуемой электрической цепи после коммутации на основе законов Кирхгофа или метода контурных токов. При анализе переходных процессов в электрических цепях считается, что:

1) коммутация происходит мгновенно (рубильники, контакторы включаются и размыкаются мгновенно, без возникновения электрической дуги);

2) время переходного процесса с математической точки зрения бесконечно длительное, его ограничивают условным пределом – длительностью переходного процесса;

3) установившийся режим после коммутации рассчитывают при теоретическом условии  $t = \infty$ , т. е. когда после коммутации прошло бесконечно большое время.

Поскольку общее решение неоднородного дифференциального уравнения равно сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения, то переходный ток равен сумме двух составляющих токов установившегося (принужденного) и свободного режимов:

$$i(t) = i_y + i_{св}.$$

Аналогично переходное напряжение  $u_C(t) = u_{C_y} + u_{C_{св}}$ .

---

Расчет токов и напряжений установившегося режима в цепи после коммутации выполняют обычными методами, которые используют при анализе цепей постоянного и переменного токов.

Следует помнить, что при действии в цепи источника постоянного напряжения в установившемся режиме ток через емкостный элемент  $C$  не течет, т. е.  $i_C = 0$ , поскольку сопротивление конденсатора при постоянном токе равно бесконечности. Падение напряжения на индуктивном элементе  $L$  при неизменном во времени токе равно нулю, т. е.  $u_L = 0$ , так как сопротивление катушки равно нулю.

При действии в цепи источника синусоидального напряжения расчет установившихся токов и напряжений можно выполнить комплексным методом.

Общее решение однородного дифференциального уравнения первого порядка дает ток (или напряжение) свободного режима:  $i_{св} = Ae^{pt}$ , где  $A$  – постоянная интегрирования;  $p$  – корень характеристического уравнения.

Как известно из математики, характеристическое уравнение дифференциального уравнения  $n$ -го порядка составляют при помощи алгебраизации соответствующего однородного уравнения. Например, имеем однородное дифференциальное уравнение вида

$$a_2 \frac{d^2 i}{dt^2} + a_1 \frac{di}{dt} + a_0 i = 0. \quad (18.1)$$

После замены символа дифференцирования  $\frac{d}{dt}$  на символ  $p$  и сокращения правой и левой частей уравнения на  $i$  ( $i \neq 0$ ) получаем характеристическое уравнение:

$$a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

Постоянную интегрирования  $A$  находят из начальных условий, т. е. путем подстановки в решение для переходного тока  $i = i_y + i_{св}$  значения времени  $t = 0$  и значения тока  $i(0)$  в момент коммутации:

$$i(0) = i_y(0) + A.$$

Значения токов в индуктивных элементах и напряжений на емкостных элементах в момент коммутации определяют на основании законов коммутации из схемы до коммутации.

### 18.3. Начальные условия

В соответствии с определением свободной составляющей  $i_{св}(u_{св})$  в ее выражении имеют место постоянные интегрирования  $A_k$ , число которых равно порядку дифференциального уравнения. Постоянные интегрирования находят из начальных условий, которые принято делить на независимые и зависимые. Начальные условия – значения переходных токов и напряжений при  $t = 0_+$ .

Независимые начальные условия – значения тока в индуктивном элементе  $i_L(0)$  и напряжения на емкостном элементе  $u_C(0)$  в момент коммутации ( $t = 0_+$ ), определяемые по законам коммутации.

Зависимые начальные условия – значения токов и напряжений в момент коммутации ( $t = 0_+$ ), определяемые по законам Кирхгофа для схемы цепи, образованной после коммутации, с учетом независимых начальных условий.

К независимым начальным условиям относятся потокосцепление (ток) для катушки индуктивности и заряд (напряжение) на конденсаторе в момент времени  $t = 0_+$  (момент коммутации). Независимые начальные условия определяются на основании законов коммутации.

**Пример 18.1.** В цепи, приведенной на схеме (рис. 18.1), определить напряжение на конденсаторе и токи  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  в момент коммутации. Конденсатор до коммутации не был заряжен.

**Решение.** Поскольку до коммутации правая ветвь цепи была разомкнута, ток протекал через резисторы  $R_1$ ,  $R_2$  и катушку индуктивности ( $i_1 = i_2$ ).

В соответствии с первым и вторым законами коммутации запишем

$$i_2(0) = \frac{U_0}{R_1 + R_2}; \quad u_C(0) = 0.$$

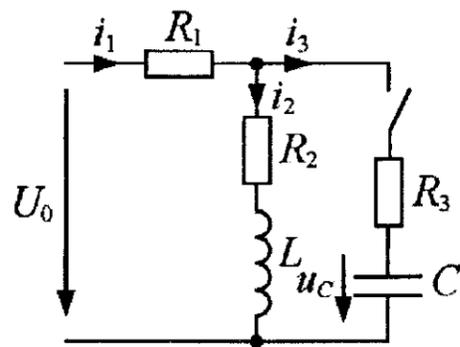


Рис. 18.1

Для внешнего контура схемы после коммутации имеет место следующее выражение в момент времени  $t = 0$ :

$$R_1(i_2(0) + i_3(0)) + R_3 i_3(0) + u_C(0) = U_0.$$

Тогда  $i_3(0) = \frac{U_0 - R_1(0)i_2(0)}{R_1 + R_2}$  и, согласно первому закону Кирхгофа,

$$i_1(0) = i_2(0) + i_3(0).$$

#### 18.4. Корни характеристического уравнения. Постоянная времени

Выражение свободной составляющей  $i_{св}(u_{C_{св}})$  общего решения дифференциального уравнения (18.1) определяется видом корней характеристического уравнения (табл. 18.2). Обозначим ее  $x_{св}$ .

Таблица 18.2

#### Выражения свободных составляющих общего решения дифференциального уравнения

Вид корней характеристического уравнения	Выражение свободной составляющей
Корни $p_1, p_2, \dots, p_k$ – вещественные отрицательные числа	$x_{св} = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}$
Корни – комплексно-сопряженные пары $p_1 = -\delta + j\omega; p_2 = -\delta - j\omega$	$x_{св} = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \theta)$

*Примечание.* Поскольку в линейной цепи со временем свободная составляющая затухает, вещественные части корней характеристического

уравнения не могут быть положительными. При вещественных корнях свободная составляющая тока или напряжения монотонно затухает, и имеет место *апериодический переходный процесс*. Наличие пары комплексно-сопряженных корней обуславливает появление затухающих синусоидальных колебаний (*колебательный переходный процесс*). Поскольку физически колебательный процесс связан с периодическим обменом энергией между магнитным полем катушки индуктивности и электрическим полем конденсатора, комплексно-сопряженные корни могут иметь место только для цепей, содержащих оба типа накопителей.

Важной характеристикой при исследовании переходных процессов является постоянная времени  $\tau$ , определяемая как

$$\tau = \frac{1}{|p_{\min}|},$$

где  $p_{\min}$  – наименьший корень характеристического уравнения.

Постоянную времени можно интерпретировать как временной интервал, в течение которого свободная составляющая уменьшится в  $e$  раз по сравнению со своим начальным значением. Теоретически переходный процесс длится бесконечно долго. Однако на практике считается, что он заканчивается при  $t = (3-4)\tau$ .

### 18.5. Включение цепи с последовательно соединенными резистором и катушкой индуктивности под постоянное напряжение

Рассмотрим переходный процесс при включении цепи  $R, L$  под постоянное напряжение  $U$  (рис. 18.2).

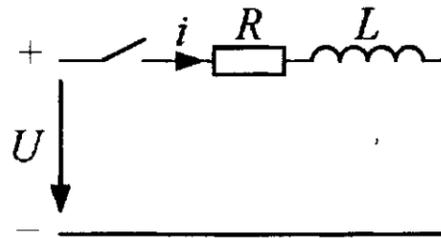


Рис. 18.2. Включение цепи с последовательно соединенными участками  $R, L$  под постоянное напряжение

---

---

Согласно второму закону Кирхгофа, дифференциальное уравнение цепи, изображенной на рисунке 18.2, имеет следующий вид:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = U.$$

Это уравнение является неоднородным и его решением будет сумма установившейся и свободной составляющих:

$$i = i_y + i_{св.}$$

Установившийся ток

$$i_y = \frac{U}{R}.$$

Однородное уравнение, определяющее свободный ток  $i_{св.}$ , будет иметь следующий вид:

$$Ri_{св.} + L \frac{di_{св.}}{dt} = 0.$$

Его характеристическое уравнение  $R + Lp = 0$  имеет корень  $p = -\frac{R}{L}$ , поэтому

$$i_{св.} = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{R}{L}t}.$$

Переходный ток  $i = i_y + i_{св.} = \frac{U}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}.$

Постоянная интегрирования  $A$  определяется по начальному значению тока. Поскольку цепь до коммутации была разомкнута, то согласно первому закону коммутации  $i(0_+) = i(0_-) = 0$ . Для времени  $t = 0$  выражение переходного тока будет иметь следующий вид:

$$0 = \frac{U}{R} + Ae^{-\frac{R}{L} \cdot 0}; \quad 0 = \frac{U}{R} + A; \quad A = -\frac{U}{R}.$$

Таким образом, переходный ток

$$i = \frac{U}{R} - \frac{U}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = \frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Соответственно напряжения на резистивном и индуктивном элементах цепи будут определяться выражениями:

$$U_R = Ri = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}); U_L = L \frac{di}{dt} = Ue^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Кривые изменения токов и напряжения показаны на рисунке 18.3.

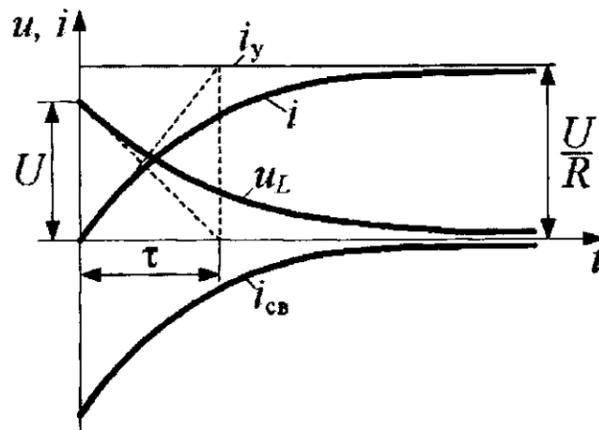


Рис. 18.3. Кривые изменения  $i$ ,  $i_y$ ,  $i_{св}$ ,  $u_L$

Определим значение переходного тока через время  $t = 4\tau$ :

$$i = \frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{4\tau}{\tau}}) = \frac{U}{R}0,982 = 0,982i_y.$$

Таким образом, спустя время  $4\tau$  переходный ток будет отличаться от значения установившегося тока на 1,8 %. Это значит, что через время  $(4-5)\tau$  с переходным процессом практически можно не считаться.

### 18.6. Отключение катушки индуктивности от источника постоянного напряжения

При размыкании ключа в цепи (рис. 18.4) установившееся значение тока (принужденная составляющая) через катушку индуктивности  $i_y = 0$ .

Согласно второму закону Кирхгофа, для цепи после коммутации можем записать следующее уравнение:

$$i(R_x + R) + L \frac{di}{dt} = 0.$$

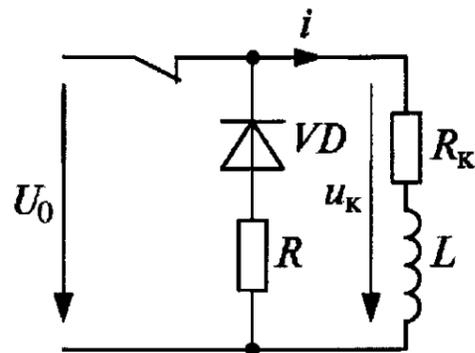


Рис. 18.4. Электрическая схема отключения катушки индуктивности

Это однородное дифференциальное уравнение. Его решение будет

$$i(t) = i_{cb} = Ae^{pt}.$$

Характеристическое уравнение однородного дифференциального уравнения соответственно имеет вид

$$Lp + R_k + R = 0,$$

откуда

$$p = -\frac{R_k + R}{L}$$

и постоянная времени переходного процесса

$$\tau_L = \frac{L}{R_k + R}.$$

В соответствии с первым законом коммутации

$$i(0) = \frac{U_0}{R_k} = A.$$

Таким образом, выражение для тока в переходном режиме

$$i(t) = \frac{U_0}{R_k} e^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

Напряжение на катушке индуктивности

$$u_k = -Ri = -\frac{R}{R_k} U_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

Анализ последнего выражения показывает, что при размыкании цепей, содержащих индуктивные элементы, могут возникать большие перенапряжения, которые без принятия специальных мер могут вывести переключающие аппараты из строя.

Действительно, модуль напряжения на катушке индуктивности в момент коммутации может во много раз превышать напряжение источника.

При отсутствии гасящего резистора  $R$  указанное напряжение прикладывается к размыкающимся контактам ключа, в результате между ними возникает дуга.

Вот почему контакты коммутирующих аппаратов размещают в специальных для этого дугогасящих камерах.

### 18.7. Включение катушки индуктивности под синусоидальное напряжение

Рассмотрим переходный процесс при включении цепи  $R, L$  под синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$  (рис. 18.5).

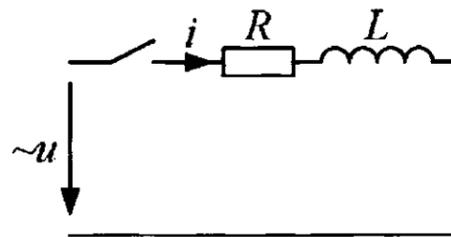


Рис. 18.5. Включение цепи с последовательным соединением участков  $R, L$  под синусоидальное напряжение

Согласно второму закону Кирхгофа, дифференциальное уравнение цепи имеет вид

$$Ri + L \frac{di}{dt} = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

Уравнение является неоднородным, поэтому

$$i = i_y + i_{св}.$$

---

Установившийся ток

$$i_y = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi);$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}.$$

Однородное уравнение, определяющее свободный ток  $i_{св}$ , будет иметь следующий вид:

$$Ri_{св} + L \frac{di_{св}}{dt} = 0.$$

Его характеристическое уравнение  $R + Lp = 0$  имеет корень  $p = -\frac{R}{L}$ . Следовательно,  $i_{св} = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{R}{L}t}$ .

Переходный ток

$$i = i_y + i_{св} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + Ae^{-\frac{R}{L}t}.$$

Постоянная интегрирования  $A$  определяется из начальных условий. Поскольку цепь до коммутации была разомкнута, то, согласно первому закону коммутации,  $i(0_+) = i(0_-) = 0$ . Для времени  $t = 0$  выражение переходного тока будет иметь следующий вид:

$$0 = I_m \sin(\psi - \varphi) + A; \quad A = -I_m \sin(\psi - \varphi).$$

Таким образом, переходный ток

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \sin(\psi - \varphi)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Напряжения на резистивном и индуктивном элементах будут определяться по формулам:

$$u_R = Ri; \quad u_L = L \frac{di}{dt}.$$

По мере затухания свободного тока переходный ток приближается к значению установившегося тока (рис. 18.6).

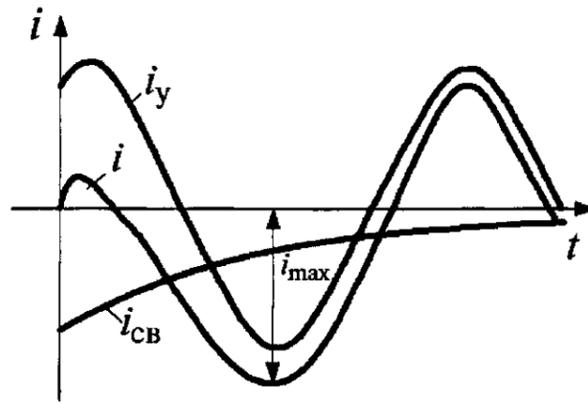
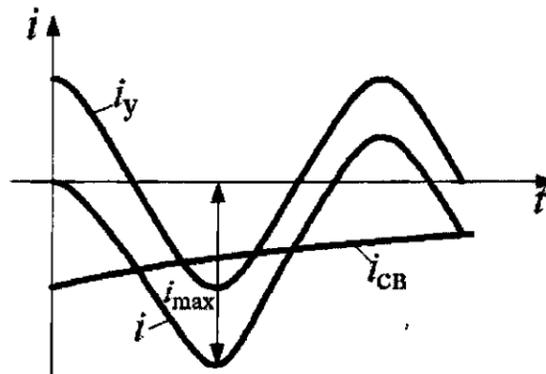


Рис. 18.6. Кривые изменения переходного тока

Однако через промежуток времени в пределах от  $1/4T$  до  $3/4T$  после включения цепи переходный ток может достичь значения  $i_{\max}$ , превышающего амплитуду установившегося тока. Наибольшего возможного значения ток достигнет в том случае, если в момент включения цепи установившийся ток проходит амплитудное значение ( $\psi - \varphi = \pi/2$ ), а величина постоянной времени достаточно велика. Приблизительно через половину периода после включения цепи ток достигнет почти удвоенной амплитуды установившегося тока  $i_{\max} \approx 2I_{m_y}$  (рис. 18.7).

Рис. 18.7. Кривые изменения переходного тока при  $\psi - \varphi = \pi/2$ 

Если в момент включения цепи установившийся ток проходит через нулевое значение ( $\psi - \varphi = 0$ ), то переходный процесс отсут-

ствует и сразу наступает установившийся режим. Это объясняется тем, что в момент включения цепи имеется полное соответствие между запасом энергии в индуктивной катушке (в данном случае равным нулю) и тем запасом энергии, который должен быть в установившемся режиме в момент включения (в данном случае также равным нулю).

### 18.8. Переходный процесс в цепи постоянного тока с последовательно соединенными резистором и конденсатором. Заряд и разряд конденсатора

Рассмотрим переходный процесс при включении конденсатора под постоянное напряжение (заряд конденсатора). Схема цепи приведена на рисунке 18.8. При переводе ключа в положение 1 начинается процесс заряда конденсатора. Согласно второму закону Кирхгофа, уравнение цепи после коммутации имеет вид

$$iR_1 + u_C = U_0.$$

Поскольку  $i = C \frac{du_C}{dt}$ , то  $R_1 C \frac{du_C}{dt} + u_C = U_0$ .

Исходя из этого неоднородного дифференциального уравнения, переходное напряжение

$$u_C = u_{C_y} + u_{C_{св}},$$

$$u_{C_y} = U_0,$$

так как  $\frac{du_C}{dt}$  в установившемся режиме равно нулю.

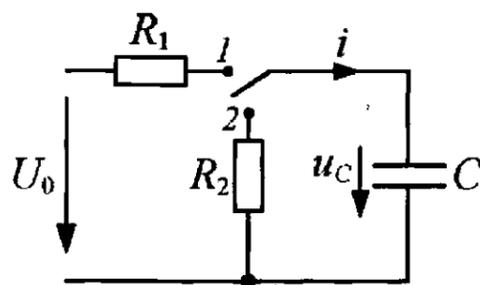


Рис. 18.8. Схема цепи для заряда и разряда конденсатора

Уравнение для свободного напряжения записывается в следующем виде:

$$R_1 C \frac{du_{C_{св}}}{dt} + u_{C_{св}} = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$R_1 C p + 1 = 0$$

имеет корень

$$p = -\frac{1}{R_1 C},$$

поэтому

$$u_{C_{св}} = A e^{pt} = A e^{-\frac{t}{R_1 C}}.$$

Переходное напряжение

$$u_C = u_{C_y} + u_{C_{св}} = U_0 + A e^{-\frac{t}{R_1 C}}.$$

Постоянная интегрирования  $A$  определяется по начальному значению напряжения  $u_C(0)$ . Так как до коммутации цепь была разомкнута, то, согласно второму закону коммутации,  $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$ . Для времени  $t = 0$  уравнение для переходного напряжения  $u_C$  будет иметь следующий вид:

$$0 = U_0 + A e^{\frac{0}{R_1 C}} = U_0 + A, \quad A = -U_0.$$

Переходное напряжение на конденсаторе

$$u_C = U_0 - U_0 e^{-\frac{t}{R_1 C}} = U_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{R_1 C}} \right) = U_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Переходный ток

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{R_1} e^{-\frac{t}{R_1 C}} = \frac{U_0}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Кривые изменения  $u_C$ ,  $u_{C_y}$ ,  $u_{C_{св}}$ ,  $i$  показаны на рисунке 18.9.

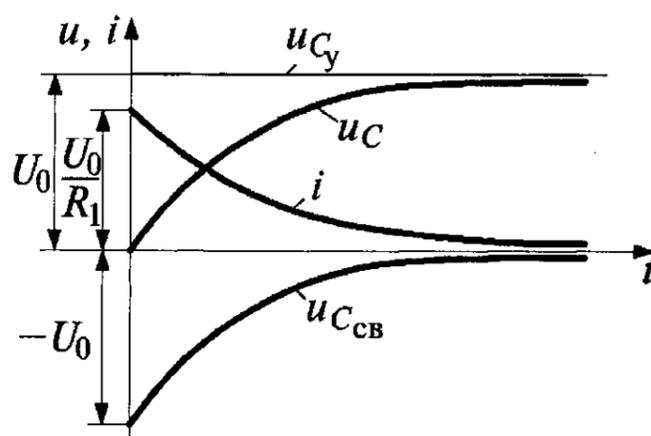


Рис. 18.9. Кривые изменения  $u_C$ ,  $u_{C_y}$ ,  $u_{C_{св}}$  и  $i$  при заряде конденсатора

Рассмотрим переходный процесс при разряде конденсатора. При разряде конденсатора на резистор  $R_2$  ключ переводится в положение 2 (см. рис. 18.8). В этом случае, согласно второму закону Кирхгофа, для короткозамкнутого контура (правого) будет иметь место следующее уравнение:

$$R_2 i + u_C = 0.$$

Поскольку  $i = \frac{dQ}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$ , то  $R_2 C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$ .

Решением этого однородного дифференциального уравнения будет функция

$$u_C = u_{C_{св}} = A e^{pt}.$$

Характеристическое уравнение, соответствующее однородному дифференциальному уравнению, имеет вид  $R_2 C p + 1 = 0$  и корень  $p = -\frac{1}{R_2 C}$ . Поэтому  $u_C = u_{C_{св}} = A e^{-\frac{t}{R_2 C}}$ .

Постоянная интегрирования  $A$  определяется по начальному значению напряжения  $u_C(0)$ . Согласно второму закону коммутации,  $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$ . Для времени  $t = 0$  выражение напряжения  $u_C$  получит вид

$$U_0 = A e^{-\frac{0}{R_2 C}} = A, \quad A = U_0.$$

Таким образом, напряжение на конденсаторе

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{R_2 C}} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Ток

$$i = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{R_2} e^{-\frac{t}{R_2 C}} = -\frac{U_0}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где  $\tau = R_2 C$  – постоянная времени цепи.

Кривые изменения  $i$ ,  $u_C$  представлены на рисунке 18.10.

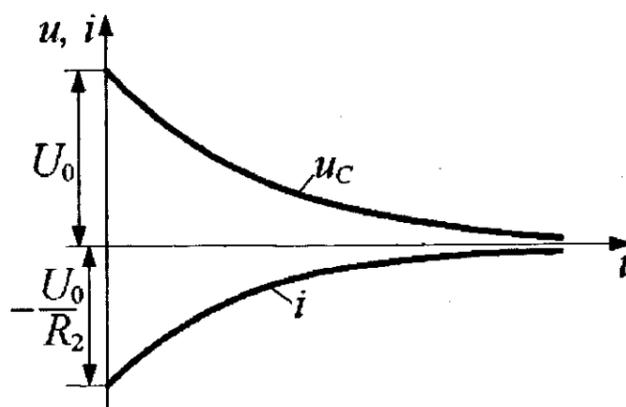


Рис. 18.10. Кривые изменения тока и напряжения при разряде конденсатора

Энергия, запасенная до коммутации в электрическом поле конденсатора, в течение переходного процесса выделяется в виде теплоты в сопротивлении  $R_2$ .



### Вопросы и задачи для самоконтроля

1. Дайте определение понятия «переходный процесс».
2. Сформулируйте законы коммутации.
3. Изложите сущность классического метода расчета переходных процессов.
4. Расскажите, что понимают под установившимися и свободными токами и напряжениями.
5. Поясните, как можно получить характеристическое уравнение.

6. Объясните, чем определяется количество корней характеристического уравнения.

7. Расскажите о характере свободного процесса при комплексных корнях характеристического уравнения.

8. Объясните, как находятся постоянные интегрирования.

9. Расскажите, как определяют начальные значения токов и напряжений.

10. Определите переходный ток  $i$  в цепи, приведенной на рисунке 18.11, если  $U = 120$  В,  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 30$  Ом,  $L = 0,1$  Гн.  
Ответ:  $i = 12 - 9e^{-100t}$  А.

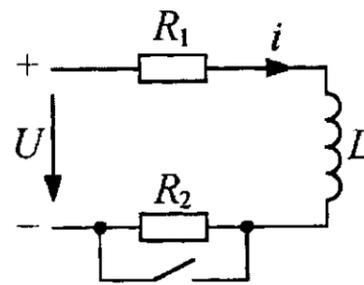


Рис. 18.11

11. Для электрической цепи, изображенной на рисунке 18.12, определите переходное напряжение на емкостном элементе  $u_C$  классическим методом, если  $U = 100$  В,  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 30$  Ом,  $C = 100$  мкФ. Постройте график изменения переходного напряжения  $u_C(t)$ . Ответ:  $u_C = 75e^{-333,3t}$  В.

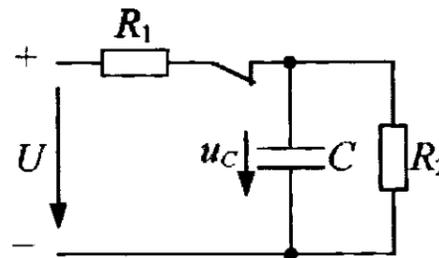


Рис. 18.12

## ЛИТЕРАТУРА

---

- Баскаков, С.И.** Лекции по теории цепей : учеб. пособие / С.И. Баскаков. 5-е изд. М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 277 с.
- Батура, М.П.** Теория электрических цепей : учеб. / М.П. Батура, А.П. Кузнецов, А.П. Курулев ; под общ. ред. А.П. Курулева. 2-е изд., испр. Минск : Выш. шк., 2007. 608 с.
- Башарин, С.А.** Теоретические основы электротехники. Теория электрических цепей и электромагнитного поля : учеб. пособие / С.А. Башарин, В.В. Федоров. 3-е изд., испр. М. : Изд. центр «Академия», 2008. 304 с.
- Бессонов, Л.А.** Теоретические основы электротехники. Электрические цепи : учеб. / Л.А. Бессонов. 11-е изд., перераб. и доп. М. : Гардарики, 2007. 704 с.
- Данилов, И.А.** Общая электротехника с основами электроники : учеб. пособие / И.А. Данилов, П.М. Иванов. 4-е изд., стер. М. : Высш. шк., 2000. 752 с.
- Евдокимов, Ф.Е.** Теоретические основы электротехники / Ф.Е. Евдокимов. М. : Изд. центр «Академия», 2004. 560 с.
- Лоторейчук, Е.А.** Теоретические основы электротехники / Е.А. Лоторейчук. М. : ИНФРА-М, 2008. 320 с.
- Попов, В.П.** Основы теории цепей : учеб. / В.П. Попов. 6-е изд., испр. М. : Высш. шк., 2007. 576 с.
- Прянишников, В.А.** Теоретические основы электротехники : курс лекций : учеб. пособие / В.А. Прянишников. Санкт-Петербург : КОРОНА принт, 2011. 366 с.
- Сборник задач по электротехнике и электронике : учеб. пособие / Ю.В. Бладыко [и др.] ; под общ. ред. Ю.В. Бладыко. Минск : Выш. шк., 2012. 478 с.**
- Теоретические основы электротехники : учеб.-метод. комплекс для студентов вузов : в 3 ч. / сост. : А.В. Крутов [и др.]. Минск : БГАТУ, 2008. Ч. 1. 353 с.; 2010. Ч. 2. 276 с.; 2011. Ч. 3. 324 с.**

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### 1. Единицы электрических и магнитных величин

Величина	Определяющее уравнение	Единица измерения	Наименование и определение
Электрическое сопротивление	$R = \frac{U}{I}$	Ом	<i>Ом</i> равен сопротивлению такого проводника, в котором при напряжении 1 В течет постоянный ток 1 А
Электрическая проводимость	$G = \frac{1}{R}$	См	<i>Сименс</i> равен проводимости участка электрической цепи сопротивлением 1 Ом
Удельное электрическое сопротивление	$\rho = \frac{RS}{l}$	Ом · м	<i>Ом-метр</i> равен удельному электрическому сопротивлению проводника площадью поперечного сечения 1 м <sup>2</sup> и длиной 1 м, имеющего сопротивление 1 Ом
Удельная электрическая проводимость	$\gamma = \frac{1}{\rho}$	См/м	<i>Сименс на метр</i> равен удельной электрической проводимости проводника, который при площади поперечного сечения 1 м <sup>2</sup> и длине 1 м имеет электрическую проводимость 1 См
Электрический заряд (количество электричества)	$Q = It$	Кл	<i>Кулон</i> равен электрическому заряду, проходящему через поперечное сечение проводника при величине постоянного тока 1 А за время 1 с
Объемная плотность электрического заряда	$\rho = \frac{Q}{V}$	Кл/м <sup>3</sup>	<i>Кулон на кубический метр</i> равен объемной плотности электрического заряда, при которой в объеме 1 м <sup>3</sup> равномерно распределен заряд 1 Кл

Приложения

Величина	Определяющее уравнение	Единица измерения	Наименование и определение
Поверхностная плотность электрического заряда	$\sigma = \frac{Q}{S}$	Кл/м <sup>2</sup>	<i>Кулон на квадратный метр</i> равен поверхностной плотности электрического заряда, при которой заряд 1 Кл равномерно распределен на поверхности площадью 1 м <sup>2</sup>
Линейная плотность электрического заряда	$\tau = \frac{Q}{l}$	Кл/м	<i>Кулон на метр</i> равен линейной плотности электрического заряда, при которой заряд 1 Кл равномерно распределен на нити длиной 1 м
Напряженность электрического поля	$E = \frac{F}{Q}$	Н/Кл = В/м	<i>Ньютон на кулон</i> равен напряженности электрического поля в точке поля, в которой на точечный электрический заряд 1 Кл поле действует с силой 1 Н. <i>Вольт на метр</i> равен напряженности однородного электрического поля, создаваемого разностью потенциалов 1 В между точками, находящимися на расстоянии 1 м на линии напряженности поля
Электрический потенциал	$\varphi = \frac{A}{Q_0}$	В 1 В = 1 Дж/Кл	<i>Вольт</i> равен потенциалу такой точки поля, в которой заряд 1 Кл обладает потенциальной энергией 1 Дж
Плотность электрического тока	$j = \frac{I}{S}$	А/м <sup>2</sup>	<i>Ампер на квадратный метр</i> равен плотности электрического тока, при которой ток 1 А равномерно распределен по поперечному сечению проводника площадью 1 м <sup>2</sup>
Электрическая емкость	$C = \frac{Q}{\varphi}$	Ф	<i>Фарад</i> равен электрической емкости такого удлиненного проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл

Величина	Определяющее уравнение	Единица измерения	Наименование и определение
Электрическое смещение	$D$	Кл/м <sup>2</sup>	<i>Кулон на квадратный метр</i> равен электрическому смещению, при котором поток электрического смещения сквозь поперечное сечение площадью 1 м <sup>2</sup> равен 1 Кл
Поток электрического смещения	$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_{i=1}^n Q_i$	Кл	<i>Кулон</i> равен потоку электрического смещения, связанному с суммарным свободным зарядом 1 Кл
Электрический момент диполя	$p =  Q l$	Кл · м	<i>Кулон-метр</i> равен электрическому моменту диполя, заряды которого, равные каждый 1 Кл, расположены на расстоянии 1 м один от другого
Поляризованность	$\vec{P} = \frac{\vec{P}}{V}$	Кл/м <sup>2</sup>	<i>Кулон на квадратный метр</i> равен поляризованности диэлектрика, при которой диэлектрик объемом 1 м <sup>3</sup> имеет электрический момент 1 Кл · м
Магнитная индукция	$B = \frac{F}{Il}$	Тл 1 Тл = $\frac{1 \text{ Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}$	<i>Тесла</i> равна магнитной индукции такого однородного магнитного поля, которое действует с силой 1 Н на каждый метр длины проводника, расположенного перпендикулярно направлению поля, если по этому проводнику проходит ток 1 А
Магнитный поток	$\Phi = BS$	Вб 1 Вб = 1 Тл · м <sup>2</sup>	<i>Вебер</i> равен магнитному потоку, проходящему сквозь плоскую поверхность площадью 1 м <sup>2</sup> , расположенную перпендикулярно направлению однородного магнитного поля, индукция которого равна 1 Тл
Напряженность магнитного поля	$H = \frac{B}{\mu_0}$	А/м	<i>Ампер на метр</i> равен напряженности такого поля, магнитная индукция которого в вакууме равна $4\pi \cdot 10^{-7}$ Тл

Приложения

Величина	Определяющее уравнение	Единица измерения	Наименование и определение
Магнитный момент контура с током	$p = IS$	$A \cdot m^2$	<i>Ампер-квадратный метр</i> равен моменту контура площадью $1 m^2$ , если по нему течет ток $1 A$
Индуктивность	$L = \frac{\Phi}{I}$	Гн $1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб/А}$	<i>Генри</i> равен индуктивности такого контура, магнитный поток которого при токе $1 A$ составляет $1 \text{ Вб}$
Намагниченность	$M = \frac{\sum p_a}{V}$	$A/m$	<i>Ампер на метр</i> равен намагниченности, при которой вещество объемом $1 m^3$ имеет магнитный момент $1 A \cdot m^2$

**2. Десятичные приставки к названиям единиц**

Т – тера ( $10^{12}$ )	д – деци ( $10^{-1}$ )	н – нано ( $10^{-9}$ )
Г – гига ( $10^9$ )	с – санти ( $10^{-2}$ )	п – пико ( $10^{-12}$ )
М – мега ( $10^6$ )	м – милли ( $10^{-3}$ )	ф – фемто ( $10^{-15}$ )
К – кило ( $10^3$ )	мк – микро ( $10^{-6}$ )	а – атто ( $10^{-18}$ )

**3. Основы математики**

1. Умножение многочленов:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2;$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

2. Действия с дробями:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

3. Пропорция:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; ad = bc; a = \frac{bc}{d}; c = \frac{da}{b}.$$

4. Действия со степенями и корнями:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; (a^m)^n = a^{mn}; \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}};$$

$$a^1 = a; a^0 = 1; a^{-n} = \frac{1}{a^n}; a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

5. Действия с нулем и бесконечностью:

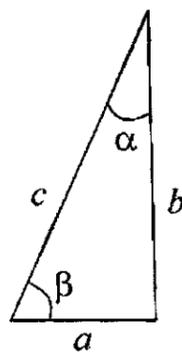
$$a \cdot 0 = 0; \frac{a}{0} = \infty; \frac{a}{\infty} = 0; a \cdot \infty = \infty.$$

6. Неопределенности:

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0 \cdot \infty; 0^0; \infty^0; 1^\infty.$$

7. Прямоугольный треугольник

*Теорема Пифагора*



$$h^2 = a^2 + b^2; h = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$a = c \cos \beta; \quad a = c \sin \alpha;$$

$$b = c \cos \alpha; \quad b = c \sin \beta;$$

$$a = b \operatorname{tg} \alpha.$$

$$b = a \operatorname{tg} \beta;$$

8. Формулы тригонометрии:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2};$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

9. Основные формулы дифференцирования:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}; \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}; \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{n}{x^{n+1}}; \quad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x;$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}; \quad \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x; \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x; \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

10. Основные формулы интегрирования:

$$\int dx = x + C; \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1); \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C; \quad \int e^x dx = e^x + C; \quad \int u dv = uv - \int v du + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C; \quad \int \cos x dx = \sin x + C.$$

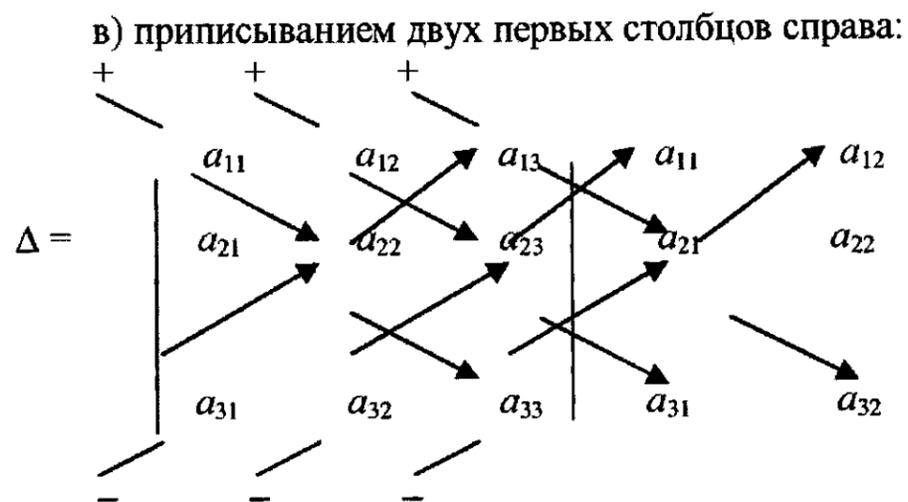
11. Раскрытие определителя третьего порядка:

а) по элементам строки или столбца:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}); \end{aligned}$$

б) по правилу треугольников:

$$\Delta = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{«+»} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array} \\ + \\ \begin{array}{c} \text{«-»} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array} \end{array}$$



#### 4. Методика использования калькуляторов для выполнения расчетов с комплексными числами

Подготовка: включение калькулятора – ON/C. Клавишей DRG устанавливают угловую единицу DEG (градусы). Вход в программу расчета: клавиши 2ndF и  $\leftrightarrow$  (cplx).

##### Примеры вычислений

*Деление комплексного числа на комплексное число:*

Пример 1:  $\frac{40 - j10}{5 - j5} = 5 + j3.$

Порядок действий: 40[a] 10[+/-][b] ÷ 5[a] 5[+/-][b] = [a][b] – просмотр результата.

Клавиша [a] дает величину вещественной части. Клавиша [b] – величину мнимой части комплексного числа.

Пример 2:  $\frac{40 - j10}{j4} = -2,5 - j10.$

Порядок действий: 40[a] 10[+/-][b] ÷ 4[b] = [a][b] – просмотр результата.

Умножение, сложение и вычитание производят аналогично.

*Переход от алгебраической формы комплексного числа  
к показательной*

Пример:  $-110 - j190 = 220e^{-j120^\circ}$ .

Порядок действий: 110   190   2ndF .

Просмотр результата: клавиша  дает модуль комплексного числа, клавиша  – аргумент в градусах.

*Переход от показательной формы комплексного числа  
к алгебраической*

Пример:  $220e^{j120^\circ} = -110 + j190$ .

Порядок действий: 220  120  2ndF .

Просмотр результата: клавиши  и .

## ОГЛАВЛЕНИЕ

---

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	<b>3</b>
<b>1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ</b> .....	<b>5</b>
1.1. Основные сведения об электромагнитном поле .....	5
1.2. Электростатическое поле. Закон Кулона.....	5
1.3. Напряженность и потенциал электростатического поля .....	7
1.4. Электрическое напряжение .....	9
1.5. Электростатическое поле – поле потенциальное.....	10
1.6. Графическое изображение электростатического поля .....	11
1.7. Поляризация диэлектрика. Вектор электрического смещения.....	13
1.8. Теорема Гаусса .....	15
1.9. Электрическая прочность диэлектрика .....	16
1.10. Проводник в электростатическом поле. Электростатическое экранирование.....	17
1.11. Поле точечного заряда и поле заряженного шара .....	18
1.12. Поле заряженной оси .....	19
Вопросы и задачи для самоконтроля.....	20
<b>2. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И ИХ РАСЧЕТ</b> .....	<b>22</b>
2.1. Электрическая емкость. Конденсаторы.....	22
2.2. Поле и электрическая емкость плоского конденсатора.....	22
2.3. Поле и электрическая емкость цилиндрического конденсатора .....	26
2.4. Энергия и плотность энергии электрического поля .....	29
2.5. Последовательное соединение конденсаторов .....	31
2.6. Параллельное и смешанное соединение конденсаторов .....	32
Вопросы и задачи для самоконтроля.....	34
<b>3. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА</b> .....	<b>36</b>
3.1. Электрическая цепь .....	36
3.2. Электродвижущая сила.....	38
3.3. Электрический ток.....	38
3.4. Электрическое сопротивление. Закон Ома.....	41
3.5. Энергия и мощность источника ЭДС .....	45
3.6. Преобразование электрической энергии в тепловую .....	46
3.7. Преобразование электрической энергии в световую.....	47
3.8. Режимы электрических цепей.....	48
3.9. Схемы замещения источников энергии.....	51
3.10. Схема замещения разветвленной электрической цепи.....	53
Вопросы и задачи для самоконтроля.....	55

<b>4. РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА.....</b>	<b>58</b>
4.1. Законы Кирхгофа .....	58
4.2. Неразветвленная электрическая цепь .....	62
4.3. Потенциальная диаграмма неразветвленной цепи.....	64
4.4. Параллельное соединение резистивных элементов .....	66
4.5. Расчет электрических цепей методом эквивалентных сопротивлений (метод свертывания цепи).....	68
4.6. Преобразование соединения треугольником в эквивалентное соединение звездой и обратно .....	71
4.7. Метод уравнений Кирхгофа.....	75
4.8. Метод контурных токов .....	78
4.9. Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС. Метод узловых потенциалов .....	81
4.10. Метод двух узлов .....	85
4.11. Принцип и метод наложения.....	89
4.12. Метод эквивалентного генератора .....	93
Вопросы и задачи для самоконтроля .....	97
<b>5. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА.....</b>	<b>101</b>
5.1. Механические силы в магнитном поле. Магнитная индукция .....	101
5.2. Линии магнитной индукции.....	102
5.3. Напряженность магнитного поля. Магнитная проницаемость среды .....	104
5.4. Магнитный поток.....	105
5.5. Закон полного тока. Магнитное поле прямолинейного проводника с током.....	106
5.6. Сила взаимодействия двух проводов с током в линии электропередачи.....	107
5.7. Магнитное потокосцепление. Собственная индуктивность .....	108
5.8. Взаимная индуктивность. Коэффициент связи.....	109
5.9. Магнитное поле, индуктивность катушки на кольцевом сердечнике и цилиндрической катушки .....	112
5.10. Намагничивание вещества. Элементы теории ферромагнетизма .....	115
5.11. Характеристики ферромагнитных материалов .....	117
5.12. Виды ферромагнитных материалов .....	120
Вопросы и задачи для самоконтроля .....	122
<b>6. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА.....</b>	<b>124</b>
6.1. Основные понятия и разновидности магнитных цепей .....	124
6.2. Законы магнитных цепей.....	126
6.3. Закон Ома для участка магнитной цепи.....	128
6.4. Вебер-амперная характеристика и ее построение.....	129
6.5. Расчет неразветвленных магнитных цепей.....	131
6.6. Расчет разветвленных магнитных цепей.....	134
Вопросы и задачи для самоконтроля .....	137

<b>7. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ .....</b>	<b>138</b>
7.1. Явление и закон электромагнитной индукции .....	138
7.2. Правило Ленца.....	138
7.3. ЭДС в проводнике, движущемся в магнитном поле. Правило правой руки.....	140
7.4. Взаимное преобразование механической и электрической энергий.....	142
7.5. ЭДС самоиндукции и взаимной индукции .....	145
7.6. Принцип действия трансформатора .....	147
7.7. Вихревые токи .....	148
7.8. Энергия магнитного поля. Плотность энергии магнитного поля.....	150
Вопросы и задачи для самоконтроля.....	151
<b>8. СИНУСОИДАЛЬНЫЕ ЭДС И ТОК.....</b>	<b>154</b>
8.1. Общие положения о цепях синусоидального тока .....	154
8.2. Величины, характеризующие синусоидальный ток. Генерирование синусоидальной ЭДС .....	155
8.3. Среднее и действующее значения синусоидального тока, напряжения, ЭДС.....	159
8.4. Различные способы представления синусоидальных величин.....	163
Вопросы и задачи для самоконтроля.....	170
<b>9. ЭЛЕМЕНТЫ И ПАРАМЕТРЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА.....</b>	<b>172</b>
9.1. Особенности параметров электрических цепей синусоидального тока ...	172
9.2. Законы Кирхгофа для цепей синусоидального тока.....	174
9.3. Цепь синусоидального тока с активным сопротивлением .....	176
9.4. Цепь синусоидального тока с индуктивным элементом .....	178
9.5. Цепь синусоидального тока с емкостным элементом .....	181
9.6. Цепь синусоидального тока с реальной катушкой индуктивности .....	185
9.7. Цепь синусоидального напряжения с последовательным соединением активного сопротивления и электрической емкости.....	192
Вопросы и задачи для самоконтроля.....	195
<b>10. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА.....</b>	<b>197</b>
10.1. Неразветвленная цепь с активным сопротивлением, индуктивностью и емкостью.....	197
10.2. Основные понятия о резонансе в электрических цепях. Резонанс напряжений.....	203
10.3. Параллельное соединение элементов в цепи.....	208
10.4. Резонанс токов .....	214
10.5. Коэффициент мощности .....	219
Вопросы и задачи для самоконтроля.....	222
<b>11. СИМВОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД.....</b>	<b>225</b>
11.1. Основные понятия о символическом методе расчета электрических цепей синусоидального тока.....	225

11.2. Расчет цепей синусоидального тока со смешанным соединением элементов.....	225
11.3. Расчет сложных цепей синусоидального тока .....	234
Вопросы и задачи для самоконтроля .....	236
<b>12. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ.....</b>	<b>237</b>
12.1. Понятие об индуктивно связанных цепях.....	237
12.2. Взаимоиндуктивное сопротивление.....	239
12.3. Согласно и встречное включение катушек.....	240
12.4. Расчет электрических цепей с взаимной индуктивностью, последовательное соединение .....	242
Вопросы и задачи для самоконтроля.....	247
<b>13. ТРЕХФАЗНЫЕ СИММЕТРИЧНЫЕ ЦЕПИ.....</b>	<b>249</b>
13.1. Трехфазная система ЭДС. Последовательность фаз.....	249
13.2. Несвязанная трехфазная система электрических цепей.....	252
13.3. Соединение обмоток генератора звездой.....	253
13.4. Соединение обмоток генератора треугольником.....	257
13.5. Расчет симметричных трехфазных цепей .....	259
Вопросы и задачи для самоконтроля.....	265
<b>14. ТРЕХФАЗНЫЕ НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЦЕПИ .....</b>	<b>268</b>
14.1. Расчет несимметричной трехфазной цепи при соединении источника и приемника звездой.....	268
14.2. Расчет несимметричной трехфазной цепи при соединении приемников треугольником .....	274
14.3. Определение мощности в трехфазных электрических цепях .....	281
14.4. Симметричные составляющие несимметричной трехфазной цепи. Метод симметричных составляющих.....	284
Вопросы и задачи для самоконтроля.....	289
<b>15. ВРАЩАЮЩЕЕСЯ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ .....</b>	<b>290</b>
15.1. Понятие пульсирующего магнитного поля.....	290
15.2. Вращающееся магнитное поле.....	291
15.3. Принцип действия асинхронного двигателя.....	293
Вопросы и задачи для самоконтроля.....	295
<b>16. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫМИ ЭДС, НАПРЯЖЕНИЯМИ И ТОКАМИ.....</b>	<b>296</b>
16.1. Причины возникновения несинусоидальности ЭДС, напряжений и токов .....	296
16.2. Разложение периодической несинусоидальной кривой в тригонометрический ряд Фурье.....	297
16.3. Расчет мгновенных значений напряжений и токов в электрических цепях при действии периодических несинусоидальных ЭДС .....	300

16.4. Действующие значения периодических несинусоидальных токов, напряжений и ЭДС.....	304
16.5. Коэффициенты, характеризующие форму кривых токов и напряжений.....	305
16.6. Мощность в цепи несинусоидального тока .....	307
16.7. Электрические фильтры .....	308
16.8. Высшие гармоники в трехфазных системах.....	312
Вопросы и задачи для самоконтроля.....	316
<b>17. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ.....</b>	<b>318</b>
17.1. Общие сведения о нелинейных элементах и цепях.....	318
17.2. Нелинейные электрические цепи постоянного тока. Вольт-амперные характеристики нелинейных резисторов.....	319
17.3. Графический метод расчета нелинейных электрических цепей постоянного тока при последовательном, параллельном соединении.....	322
17.4. Нелинейные цепи переменного тока .....	328
17.5. Катушка с ферромагнитным сердечником в цепи переменного тока.....	331
Вопросы и задачи для самоконтроля.....	341
<b>18. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ .....</b>	<b>343</b>
18.1. Причины возникновения переходных процессов. Законы коммутации.....	343
18.2. Классический метод расчета переходных процессов .....	345
18.3. Начальные условия .....	348
18.4. Корни характеристического уравнения. Постоянная времени.....	349
18.5. Включение цепи с последовательно соединенными резистором и катушкой индуктивности под постоянное напряжение .....	350
18.6. Отключение катушки индуктивности от источника постоянного напряжения.....	352
18.7. Включение катушки индуктивности под синусоидальное напряжение .....	354
18.8. Переходный процесс в цепи постоянного тока с последовательно соединенными резистором и конденсатором. Заряд и разряд конденсатора .....	357
Вопросы и задачи для самоконтроля.....	360
<b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>362</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ .....</b>	<b>363</b>

*Учебное издание*

**Крутов** Анатолий Викторович  
**Кочетова** Эмма Леонидовна  
**Гузанова** Татьяна Федоровна

## **ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

**Учебное пособие**

2-е издание, стереотипное

*Редактор Л.В. Рутковская*  
*Компьютерная верстка С.Л. Прокопцовой*  
*Корректор Е.В. Потапейко*  
*Дизайн обложки С.Л. Прокопцовой*

Подписано в печать 11.05.16. Формат 60×84/16.  
Гарнитура «Таймс». Бумага офсетная. Ризография.  
Усл. печ. л. 22,15. Уч.-изд. л. 15,72. Тираж 700 экз. Заказ 86.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Республиканский институт профессионального образования.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 1/245 от 27.03.2014.  
Ул. К. Либкнехта, 32, 220004, Минск. Тел.: 226 41 00, 200 43 88.

Отпечатано в Республиканском институте  
профессионального образования. Тел. 200-69-45.